Anleitung

zum

mathematischen Unterricht

an höheren Schulen

herausgegeben

von

Dr. Fr. Reidt,
Professor am Gymnasium zu Hamm.

Berlin,
G. Grote'sche Verlagsbuchhandlung.
1886.



Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Inhaltsverzeichnis.

b) Arithmetik.

c) Algebra.

d) Anfangsgründe der niederen Analysis.

5. Kapitel. Die Planimetrie.

a) Der propädeutische Unterricht.

b) Der wissenschaftliche Unterricht.

6. Kapitel. Die ebene Trigonometrie.

7. Kapitel. Die Stereometrie und die sphärische Trigonometrie.

Register.

Die beigesetzten Zahlen geben die Seiten an.

Einleitung
(zugleich statt Vorrede).

§ 1. Bedürfnis und Schwierigkeiten eines pädagogischen Wegweisers für den elementar-mathematischen Unterricht.

Die geringe Vorbereitung, welche die Kandidaten des höheren Lehramts für ihren praktischen Beruf von den Universitäten mitzubringen pflegen, wird von vielen Seiten beklagt. Daß die zur Abhilfe getroffene Einrichtung des Probejahres meist nicht hinreicht, ihren Zweck zu erfüllen, scheint allgemein anerkannt zu werden. Die königlich preußische Regierung hat deshalb vor einiger Zeit den Versuch gemacht, durch eine Verlängerung des Vorbereitungsdienstes und die Einführung einer zweiten, praktischen Prüfung die bestehenden Übelstände zu mildern. Dieser Versuch begegnete jedoch Bedenken in betreff seines voraussichtlichen Erfolgs und ist vorerst gescheitert; nach wie vor besteht daher die Klage, daß der angehende Lehrer seine praktische Befähigung zum größten Teile durch eigene Erfahrung erwerben müsse, daß das nicht anders als auf Kosten seiner Schüler geschehen könne, und daß dieser Nachteil in der Regel die Schüler der unteren Klassen treffe, deren Unterricht doch am meisten eine durchgebildete Methode erfordere.

Man hat sogar die in neuerer Zeit so oft gehörte und besprochene Klage der Überbürdung zum großen Teile auf die Unerfahrenheit der jüngeren Lehrer, auf falsche Behandlung der Schüler und der Unterrichtsfächer zurückführen wollen, und man stellt die Lehrer der höheren Schulen in betreff ihrer pädagogischen Vorbildung und Leistung nicht selten weit hinter die Volksschullehrer, welche sich selbst mit Rücksicht auf die ihnen gewordene pädagogische Ausbildung im Seminar gern vorzugsweise als die „Pädagogen" bezeichnen.

Wie weit alle diese Klagen begründet sind, soll hier nicht zum oft wiederholten mal erörtert werden; daß dieselben jedenfalls nicht aller Berechtigung entbehren, scheint dem Verfasser dieses Buches fast allgemein zugestanden.

Nicht zum wenigsten werden dieselben für die Lehrer der Mathematik zugegeben werden müssen. Der Direktor der Schule, welcher

der junge Probekandidat zugewiesen wird, ist in der Mehrzahl der Fälle Philologe; nur ein Teil der realistischen Anstalten besitzt mathematisch durchgebildete Direktoren. Es wird daher nur in ausnahmsweisen Fällen eine methodisch-didaktische Anleitung des Kandidaten durch den dem Unterricht beiwohnenden Direktor möglich sein, auch wenn dieser die erforderliche Zeit und den Willen dazu hat. Die Mathematik hat ihr jetziges Lehrverfahren gegenüber der Methode Euklids erst in den letzten Jahrzehnten entwickelt oder wenigstens zu allgemeinerer Durchführung gebracht; ältere Direktoren kennen dasselbe oft nicht einmal durch die Erinnerungen aus den eigenen Schuljahren, die wenigsten werden Zeit und Gelegenheit gehabt haben, den Fortschritten desselben durch eigene Beobachtung und Mitarbeit zu folgen. Die mathematischen Oberlehrer der Anstalten, welche zum Ersatz eintreten könnten, besitzen dem Kandidaten gegenüber nicht die Autorität des Direktors und werden, auch selbst mit Stunden und Korrekturen reich versehen, nicht immer die nötige Zeit und Lust finden, sich daneben dem Anfänger in der erforderlichen eingehenden Weise zu widmen.

Hierzu kommt, daß sehr viele Anstalten überhaupt nur einen einzigen Mathematiker besitzen, und wird die Stelle eines solchen, wie es bei den seitherigen Avancementsverhältnissen wohl vorkommen kann, einem noch nicht hinreichend geschulten Anfänger übertragen, so ist dieser in betreff seiner pädagogischen Weiterbildung ganz und gar auf sich allein angewiesen. Er kann erst an den von ihm gemachten Fehlern, wenn er strebsam ist, dieselben vermeiden lernen, und ist er nicht strebsam, so lernt er dies vielleicht nie, sondern geht beständig in demselben Geleise weiter, indem er sich über mangelnde Erfolge damit tröstet, daß die Jungen zu dumm seien, die Mathematik zu verstehen.

Hierzu kommt ferner, daß in der Mathematik ein schlecht geleiteter Anfangsunterricht mehr Schaden bringt, als in irgend einem anderen Unterrichtsfach. Diese Erfahrungsthatsache erscheint begründet durch die Eigenart des Aufbaus des mathematischen Systems, bei welchem jede größere Lücke das Verständnis des Folgenden unmöglich macht. Alle anderen Fächer bauen nicht in gleichem Grade nach einander, sondern auch neben einander auf: ein Schüler, der die Geographie von Asien nicht gelernt hat, kann gleichwohl in einer anderen Klasse mit der von Europa sehr vertraut werden, ohne vorher die früher gebliebene Lücke ausfüllen zu müssen; einem Schüler, welcher sich die alte Geschichte schlecht oder gar nicht eingeprägt hat, ist es dadurch nicht unmöglich gemacht, unter einem tüchtigen Lehrer die Geschichte des Mittelalters vortrefflich zu lernen; ein schlechter Zoologe oder Botaniker kann gleichwohl später ein ausgezeichneter Physiker werden, und selbst die Sprachen sind in dieser Beziehung, wenn auch nicht so günstig als die genannten Fächer, doch immerhin besser ge-

stellt als die Mathematik. Aber auch wer dies bezweifeln möchte, wird wenigstens das zugestehen müssen, daß in der Mathematik ein schlechter Unterricht in den Anfängen von nicht geringeren schädlichen Folgen sein kann, als in irgend einem anderen Fache, und daß ein solcher zuweilen das Schicksal eines Schülers in dieser Unterrichtsdisziplin für seine ganze Schulzeit beeinflußt. Die an den Schülern der oberen Klassen hier und da beobachtete vollständige Unfähigkeit, dem mathematischen Unterricht zu folgen, zu deren Erklärung man früher die Hypothese des Mangels an einer vermeintlichen speziell mathematischen Begabung erfunden hat, läßt sich „erfahrungmäßig fast ausnahmslos auf mangelnde Sicherheit in den Elementen als ihren wahren Grund zurückführen". (Nach Bonitz, in dessen Referat auf der Oktoberkonferenz im Berliner Unterrichtsministerium.)

Um eine Abhilfe derartiger Schäden zu schaffen, ist ferner von verschiedenen Seiten der Vorschlag gemacht worden, eine besondere praktische Vorbereitung der zukünftigen Kandidaten schon auf der Universität ins Leben zu rufen. Man hat die Errichtung von Lehrstühlen für methodische Behandlung der Elementarmathematik, bezw. die Gründung besonderer praktischer Seminarien auf den Hochschulen gewünscht. In diesen Anstalten sollten die Studenten nicht in der selbständigen Bearbeitung wissenschaftlicher Probleme, sondern ganz besonders im Unterrichten angeleitet und geübt werden. Zu diesem Zwecke wurde weiterhin die Verbindung des Universitätsseminars mit einer höheren Unterrichtsanstalt vorgeschlagen, deren Direktor gleichzeitig der Leiter des ersteren sein könnte oder müßte.

Es ist nicht unsere Aufgabe, hier zu untersuchen, ob und in wieweit derartige Einrichtungen möglich und geeignet sein würden, die besprochenen Übelstände zu mildern oder zu beseitigen; jedenfalls scheint gegenwärtig keine Aussicht vorhanden, daß solche Einrichtungen in nächster Zeit ins Leben gerufen werden, und es ist nicht der Zweck der vorliegenden Schrift, bloße Wünsche zu erörtern, die keine Aussicht auf demnächstigen Erfolg haben, sondern einen Beitrag zu wirklicher Abhilfe zu bieten.

Jeder Versuch eines solchen Beitrags scheint unter den obwaltenden Verhältnissen der Mühe und mindestens der Beachtung wert zu sein. Als ein derartiger Versuch dürfte aber wohl die Herausgabe eines Werkes gelten, welches sich die Aufgabe stellt, eine Anleitung zum Unterricht des betreffenden Faches und damit wenigstens dem strebsamen Anfänger einen Anhalt und einen Führer zu bieten, wie deren die Litteratur der Elementarschulen manche und ausgezeichnete besitzt, während ein solches Werk für den mathematischen Unterricht im allgemeinen noch ganz fehlt.

Der Verfasser des vorliegenden Buches hat sich deshalb schon seit Jahren mit dem Gedanken der Ausarbeitung eines solchen „Wegweisers" beschäftigt, ist aber wiederholt vor der Schwierigkeit der

Ausführung zurückgeschreckt. Denn ein besonders großer Erfolg ist einem solchen Unternehmen nicht in Aussicht zu stellen. Ein Werk, welches sich nur an die verhältnismäßig kleine Zahl der mathematischen Lehrer höherer Anstalten, und unter diesen insbesondere nur an die Anfänger wendet, hat einen kleinen Leserkreis, zumal gerade jüngere Lehrer zuweilen, im stolzen Gefühle ihres von der Universität mitgebrachten „höheren" Wissens, eines Führers auf dem Gebiete der Elementarmathematik nicht zu bedürfen glauben und der leider weitverbreiteten Ansicht huldigen, daß das Lehren gar nicht gelernt zu werden brauche, sondern daß es genüge, den Lehrstoff selbst zu wissen, um ihn auch anderen beibringen zu können. Diese letztere, den Wert des eigenen Standes herabsetzende Ansicht läßt leider befürchten, daß das vorliegende Unternehmen nicht etwa blos äußerlich, sondern namentlich in der Erreichung seines inneren Zweckes nur geringen Erfolg haben werde.

Und doch, wie falsch ist diese Ansicht, und wie sehr hat sie schon dem gesamten Lehrerstande geschadet! Ein großer Teil des Vorbereitungswesens von Knaben für höhere Gymnasialklassen beruht auf dieser Meinung, daß ein jeder, welcher auf der Universität, oder auch nur durch Privatstudium sich ein bestimmtes Wissen angeeignet habe, ja welcher nur selbst die zur Absolvierung einer solchen Klasse erforderlichen Kenntnisse besitze, deshalb berechtigt und befähigt sei, sich zum Lehrer dieser Kenntnisse zu machen. In keinem anderen Fache ist wohl die Ansicht so verbreitet, daß überhaupt jeder allgemein Gebildete sich erlauben könne, über die wichtigsten Fragen, wie über Zweck, Methode und Wert eines Unterrichtsfaches, oder über die Erfolge dieser und jener Anstalt oder des einzelnen Mannes, ohne weiteres absprechend zu urteilen. — Auch die Meinung, daß das Unterrichten zwar eine Kunst, daß aber diese Kunst dem rechten Lehrer angeboren sei und also deshalb nicht erst erlernt werden müsse, diese Ansicht vom „geborenen Lehrer" ist, abgesehen vielleicht von einzelnen nach dieser Richtung ausnahmsweise begabten Männern, die sozusagen fast instinktiv das Richtige treffen, eine durchaus irrige. Jeder erfahrene Lehrer, der dem Unterrichte eines ungeschulten Anfängers beiwohnte, weiß wie zahlreich die Fehler sind, die in einem solchen fast ausnahmslos gemacht werden, und von denen der Anfänger selbst natürlich noch keine Ahnung hat. Und auch der „geborene Lehrer" wird seinen Unterricht nicht schädigen, wenn er frühzeitig lernt, das unbewußt Geübte mit Bewußtsein als das Richtige zu pflegen und zu entwickeln, auch er wird vielfach die Wahrnehmung machen, daß er immerhin in der Lage ist, in betreff der Technik des Unterrichtens noch etwas lernen zu können.

Wenn nun nach diesen Richtungen hin ein Unternehmen, wie das vorliegende, auch nur einen geringen Erfolg haben sollte, so könnte doch auch ein solcher schon als hinreichend lohnend ange-

sehen werden. Allein es treten noch andere bedeutende Schwierigkeiten hinzu.

Unter den Lehrern der Mathematik herrscht, vielfachen Erfahrungen nach zu schließen, ein ausgeprägter Subjektivismus. Mag auch in den allgemeinen, den sozusagen großen Fragen der Methodik eine Einigung oder wenigstens eine beträchtliche Mehrheit erzielt sein, in der Anwendung auf das Einzelne gehen die Ansichten sehr erheblich auseinander. Hier verlangt einer, obgleich er im übrigen der genetisch-heuristischen Methode voll und ganz zustimmt, doch in dem ersten Unterricht (der Quarta) die dogmatisch-dozierende Methode beibehalten zu sehen, um zunächst der ersteren einen Untergrund zu schaffen und die Schwierigkeiten des Anfangs zu überwinden, während der andere nur darin eine Bürgschaft des Erfolgs sieht, daß von Anfang an der Schüler durch die heuristische Behandlungsweise des Gegenstandes zu selbständigem Denken angeleitet werde. — An anderer Stelle erhebt sich eine Richtung, welche eine Reformation des gesamten geometrischen Unterrichts im Geiste der sogenannten neueren, synthetischen Geometrie von seinen ersten Anfängen an verlangt und die ältere bekämpft, welche ihr wieder den Wahrspruch: „Vom Besonderen zum Allgemeinen, nicht umgekehrt" als das allein richtige Prinzip des Unterrichts noch ungereifter Schüler entgegenhält. — Der eine fordert eine Vorbereitung des wissenschaftlichen Unterrichts durch eine auf Anschauung beruhende Propädeutik, etwa eine Art „Formenlehre" in Pestalozzischer Weise, der andere verwirft dieselbe als unnütz und weil sie durch Gewöhnung an unzureichende Beweise, wie durch Vorwegnahme von später in wissenschaftlichem Geiste zu Lehrendem schädlich wirke.

Selbst in anscheinend ganz einfachen und speziellen Fragen stehen sich nicht selten die Ansichten diametral gegenüber: Der eine macht dem Verfasser eines Werkes den Vorwurf, daß er parallele Gerade als solche definiere, welche einander niemals schneiden, und nicht wissenschaftlicher als solche, deren Durchschnittspunkt im Unendlichen liege; der andere klagt im Gegenteil darüber, daß der Quartaner durch solche zu früh vorgebrachte Abstraktionen an Unklarheit und an ein Spielen mit unverstandenen Worten gewöhnt werde. Hier streiten zwei darüber, ob ein Verhältnis als der Quotient zweier gleichartigen Größen definiert werden dürfe, und sowohl derjenige, der dies thut, als derjenige, der es nicht thut, erhält von gegnerischer Seite seine Lektion. Dort wird über die Möglichkeit, zwei benannte Zahlen mit einander zu multiplicieren und über die Beweisführung von $(-a) . (-b) = + ab$ in wiederholten Journalartikeln und selbst mit Erbitterung diskutiert, oder sogar über die Frage, ob es gestattet sei, „dreimal mehr, dreimal weniger" zu sagen, eine lange Erörterung geführt.

Solchen und vielen ähnlichen Erfahrungen gegenüber gehört ein gewisser Mut dazu, ein speziell der Methodik des mathematischen Elementarunterrichts gewidmetes Werk der Öffentlichkeit preiszugeben.

Welche Flut von Entgegnungen und Belehrungen eines Besseren hat der Verfasser eines solchen zu erwarten, falls — seine Arbeit überhaupt Beachtung finden sollte! Wie gering wird auch hiernach der Nutzen sein, den dieselbe zu stiften erwarten darf, wie leicht endlich wird der Verfasser sich als Lohn für eine auch sachlich sehr schwierige und mühevolle Arbeit den Vorwurf der Anmaßung zuziehen, weil er es unternommen habe, seinen vielleicht erfahrenern und geschickteren Fachgenossen eine Anleitung zu ihrem Berufe geboten zu haben, während er selbst der Belehrung noch dringend bedürfe!

Wenn der Verfasser es trotz aller dieser Bedenken gewagt hat, der Sache näher zu treten und den Versuch zu machen, auf Grund seiner ein Menschenalter hindurch in der Schule gesammelten Erfahrungen die gestellte Aufgabe zu lösen, so verdankt er den Mut dazu einer ihm ungesucht von anderer Seite gemachten Anregung. Allein er glaubte doch dem mathematischen Lehrerpublikum sein Werk nicht vorlegen zu sollen, ohne durch die vorstehenden Bemerkungen den Standpunkt zu charakterisieren, auf welchem dasselbe aufgebaut ist.

Wenn es eine Aufgabe eines solchen „Wegweisers" ist, dasjenige in zusammenfassende Darstellung zu bringen, was in der Gegenwart allgemein, oder doch von der Mehrzahl der Lehrer der Mathematik als richtig anerkannt wird, so darf man es demselben nicht verargen, wenn er zum Teil nur als eine Sammlung von Aussprüchen anderer auftritt. Der Verfasser mußte es im Gegenteil für seine Pflicht halten, die vielfach zerstreute Litteratur des fraglichen Themas, wenigstens aus der neueren Zeit, thunlichst eingehend zu sammeln und mit der wünschenswerten Treue der Reproduktion in geordneter Weise vorzuführen. Als benutzte Quellen sind die folgenden zusammenfassend namhaft zu machen:

1) Verhandlungen von preußischen Direktorenkonferenzen;
2) Verhandlungen der mathem.-naturw. oder pädagogischen Sektionen der Naturforscher- und der Philologenversammlungen;
3) Abhandlungen in didaktischen Zeitschriften, insbesondere in Hoffmanns Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht und in Langbein-Krumme's Pädagogischem Archiv;
4) Abhandlungen in Programmen höherer Lehranstalten;
5) Lehrbücher und andere Schulschriften, insbesondere deren Vorreden;
6) Selbständige pädagogische Schriften.

Daß es dem Verfasser aus verschiedenen Gründen nicht möglich gewesen ist, diese Quellschriften in erschöpfender Vollständigkeit zu beschaffen und zu benutzen, bedarf wohl kaum der Rechtfertigung. Derselbe wird für freundliche Hinweise auf Übersehenes und namentlich für Zugänglichmachung hervorragender älterer, sowie noch erscheinender Quellschriften zu gunsten einer event. neuen Auflage seines Buches dankbar sein.

Die benutzten Schriften sind bei längeren Entlehnungen oder Auszügen auch im einzelnen citiert worden. Daß in solchen Fällen, wo

derselbe Gedanke in einer größeren Anzahl von Schriften vorkommt, bezw. als Gemeingut betrachtet werden konnte, sowie auch hier und da bei kürzeren Aussprüchen die Hinzufügung einer speziellen Quellenangabe unterlassen wurde, wird im Interesse der Beseitigung einer störenden Anhäufung von nutzlosen Citaten gerechtfertigt erscheinen. Das vorliegende Buch erhebt bei seiner ausgesprochenen Bestimmung, der Anleitung von Anfängern im Unterrichten zu dienen und denselben den gegenwärtigen Standpunkt der mathematischen Didaktik vorzuführen, keinen Anspruch darauf, wesentlich Neues zu bringen und methodisch bahnbrechend auf eine Neugestaltung des gesamten mathematischen Schulunterrichts einzuwirken.

Auf der anderen Seite aber wird es erklärlich und der Entschuldigung kaum bedürftig sein, wenn der Verfasser da, wo noch verschiedene Ansichten einander gegenüberstehen, seine eigene Überzeugung mehr oder minder in den Vordergrund treten läßt, und dieselbe mit besonderer Wärme vertritt. Wer deshalb in dem vorliegenden Buche hier und da eine völlig objektive, parteilose Darlegung vermissen sollte, der möge bedenken, daß es sich hier um einen ersten Versuch handelt, die großen Schwierigkeiten eines solchen Unternehmens zu überwinden. Wenn es später anderen gelingen sollte, auf der Grundlage dieses Versuches weiter fortzubauen und Besseres zu liefern, so wird der Verfasser gern damit seine Aufgabe als gelöst ansehen.

§ 2. Verhältnis zur allgemeinen Pädagogik.

Es ist selbstverständlich, daß eine jede Anleitung zum Unterricht eines besonderen Lehrgegenstandes die allgemeinen Grund- und Lehrsätze der Didaktik zugrunde legen muß, welche infolge der historischen Entwickelung der Pädagogik und der Ergebnisse der psychologischen Wissenschaft dem gegenwärtigen Standpunkte des Unterrichtswesens entsprechen. Ist es doch die besondere Aufgabe einer solchen Anleitung, zu zeigen, wie jene allgemein giltigen Lehren auf einem engeren Gebiete verwertet und zur Ausführung gebracht werden können.

Gleichwohl kann von einem die Methodik eines besonderen Faches behandelnden Lehrbuche nicht erwartet werden, daß dasselbe mit einem allgemeinen Kursus beginne, welcher die jedem Unterricht gemeinsamen Forderungen der Pädagogik erörtere; andererseits aber darf auch ein solches, vorzugsweise für das Studium von Anfängern im Lehramt bestimmtes Werk keineswegs die vollständige Kenntnis jener allgemeinen Grundlagen ohne weiteres voraussetzen. Nur scheinbar liegt hierin ein Widerspruch: jener allgemeine Kursus würde praktisch ziemlich wertlos sein, denn seine Voraussendung würde selbst einem fundamentalen didaktischen Satze, nämlich demjenigen des Fortschritts vom Besonderen zum Allgemeinen, widersprechen. Selbst Lehren von solcher ohne weiteres einleuchtenden Richtigkeit, wie z. B. die folgende: „Man halte

im Unterricht stets streng auf ungeteilte Aufmerksamkeit der Schüler", sind fast ohne jeden Wert, wenn nicht an besonderen Beispielen gezeigt wird, in welcher Weise man es anfangen muß, um diese Forderung zu erfüllen. Wohl jeder Lehrer wünscht, auch ohne deshalb belehrt zu sein, die vollste Aufmerksamkeit seiner Schüler, aber gar mancher Anfänger weiß eben nicht, auf welche Weise er dieselbe in seinem Fache anders als durch Predigen, Drohen oder Strafen zu erzwingen vermag. Hier, wie in anderen Fällen, muß eben die Methodik einzelner Unterrichtsfächer eintreten, indem sie an bestimmten Beispielen die Praxis des Unterrichts erläutert und übt, und hierdurch erst den Boden für allgemeinere Abstraktionen vorbereitet.

Die allgemeine wissenschaftliche Pädagogik hat also nach unserer Ansicht der besonderen der einzelnen Lehrgegenstände nicht durchweg vorauszugehen, sondern dieser wenigstens teilweise nachzufolgen. Der umgekehrte Weg würde ebenso verkehrt sein, wie wenn man z. B. den Unterricht in der Chemie mit einer Erklärung des Begriffs und der Aufgabe dieser Wissenschaft, sowie der Theorien von der Wertigkeit der Elemente, der Äquivalenz u. s. w. beginnt, statt vorher den Lernenden mit einer Reihe einzelner Thatsachen bekannt zu machen, die ihm allein das Verständnis jener abstrahierten Theorien ermöglichen. Kein Mensch, höchstens vielleicht einzelne besonders geniale Geister ausgenommen, wird aus solchen vorausgeschickten allgemeinen Erörterungen, falls er ohne alle und jede Vorkenntnisse an das neue Fach herantritt, etwas anderes gewinnen, als im günstigsten Falle eine Übung des Gedächtnisses im Behalten von unverstandenem Wortkram, oder im ungünstigsten eine gesteigerte Gewöhnung an ein sich Begnügen mit Worten ohne Begriffen. „Denn eben wo Begriffe fehlen, da stellt ein Wort zur rechten Zeit sich ein."

Aber auch wenn man, wie in unserem Fall, ein gewisses Verständnis allgemeiner Erörterungen bei dem Leser mit Sicherheit voraussetzen darf, wird doch jener Gang vom Besonderen zum Allgemeinen klarer und instruktiver sein als der umgekehrte.

Mit dem soeben Gesagten soll jedoch nicht behauptet werden, daß ein vorausgehendes oder gleichzeitiges Studium gediegener Schriften allgemeiner Art über praktische Pädagogik nicht zu empfehlen sei. Solche Werke, wie z. B. die Erziehungs- und Unterrichtslehre für Gymnasien und Realschulen von Dr. W. Schrader, Berlin G. Hempel, welche die allen Lehrfächern gemeinsamen Regeln des Unterrichts im Einzelnen praktisch behandeln, sollten auf dem Arbeitstische jedes angehenden Lehrers liegen, oder doch demselben durch die Schulbibliothek zur Verfügung gestellt und von ihm fleißig studiert werden. Die allgemeine Pädagogik hat eine Menge von Fragen zu behandeln, welche mit der Methodik eines besonderen Unterrichtsfaches gar nichts zu thun haben, wie z. B. die Untersuchung über das Verhältnis von Schule und Haus, über Strafen und Belohnungen, die persönliche Stellung

des Lehrers zu seinen Schülern, über Censuren, Versetzungen und Prüfungen, über die richtige Art des Fragens, und über zahlreiche andere derartige allgemeinere oder speziellere Gegenstände. Der angehende Lehrer bedarf nach diesen Richtungen nicht minder der Belehrung, wie über die Behandlung seiner besonderen Unterrichtsfächer, ja eine richtige Befolgung der allgemeineren Grundlehren der Pädagogik ist vielfach die unerläßliche Voraussetzung für eine erfolgreiche Wirksamkeit auf dem einzelnen Gebiete.

Eine Schrift aber, welche sich die Anleitung zur Behandlung eines einzelnen Lehrgegenstandes zur Aufgabe gemacht hat, muß jene allgemeinere Unterweisung den betreffenden besonderen Werken überlassen, und sich in dieser Hinsicht darauf beschränken, die allgemeinen Regeln im einzelnen Fall erläuternd anzuwenden.

Aus diesem Grunde verzichtet der Verfasser des vorliegenden Buches auf einen ersten allgemein pädagogischen Abschnitt desselben und führt seine Leser sogleich in die besondere Praxis des gewählten Unterrichtsfaches, selbstverständlich jedoch in der Absicht, innerhalb derselben auch das Allgemeine an der Hand bestimmter Beispiele an geeignetem Orte zur Darstellung und Erläuterung zu bringen.

I. Teil.

Der mathematische Unterricht der höheren Schulen im Allgemeinen.

---

1. Kapitel.

Über Zweck und Aufgabe des mathematischen Unterrichts an höheren Lehranstalten.

§ 3. Allgemeine Vorbemerkungen.

Jeder Lehrer, welcher ein besonderes Unterrichtsfach übernimmt, muß vor allem sich darüber klar sein, welchen Zwecken sein Unterricht dienen soll, denn von der Entscheidung dieser Frage hängt es ab, in welcher Weise das betreffende Fach zu behandeln ist.

Dem Anfänger im Unterrichten scheint diese Frage nicht selten eine sehr müßige zu sein. Nach seiner Ansicht lernt man eine Wissenschaft eben nur um dieser selbst willen; das Ziel des Unterrichts ist das positive *Wissen*. Allein schon hier tritt eine Verschiedenheit der

Zwecke im besonderen zu Tage: Nach dem Einen lernt der Schüler hiernach Mathematik, weil er der Kenntnis ihrer Lehren in irgend einer Absicht, in der Regel derjenigen der Verwertung in einem zukünftigen Berufe, bedarf; er lernt, wie der Lehrling ein Handwerk lernt, von dem er dereinst zum Broterwerb Gebrauch machen will. Dem Anderen ist die Wissenschaft nur „die hehre, himmlische Göttin"; man lernt aus rein geistigem Interesse an derselben, d. h. also, man lernt um zu wissen. Ein Dritter endlich verbindet diese beiden Zwecke, indem er sie gleichzeitig zu erreichen sucht. — Man sieht leicht ein, wie schon die hiermit angedeutete Verschiedenheit der Ansichten auch auf eine verschiedene Behandlungsweise des Gegenstandes hinführen muß.

Wäre die erste Ansicht für den an den höheren Lehranstalten zu erteilenden Unterricht die allein richtige, so müßte man auch den Äußerungen der Eltern mancher Schüler zustimmen, welche meinen, daß die Beschäftigung ihrer Söhne mit der Mathematik nur eine unnütze Quälerei derselben sei: Mein Junge soll einmal Pastor werden, wozu braucht er da die Mathematik? Um eine herzerbauende Predigt machen zu können, ist doch die Kenntnis des Pythagoreischen Lehrsatzes nicht nötig! Und doch ist mein Junge wegen mangelhafter mathematischer Kenntnisse nicht versetzt worden, so daß ich denselben ohne jeden Zweck ein Jahr länger auf der Tasche behalten muß! — Giebt es nicht, fragt ein anderer, zahlreiche sehr tüchtige Juristen, die auf dem Gymnasium ihrer Zeit soviel wie nichts von der Mathematik gelernt, oder die doch gegenwärtig von dem Gelernten fast nichts mehr behalten haben? Warum läßt man also einen künftigen Juristen im Abiturientenexamen auf Grund ungenügenden mathematischen Wissens durchfallen?

Derartigen Aussprüchen gegenüber ist schon oft genug darauf hingewiesen worden, daß die Vorbildung für einen bestimmten künftigen Beruf in keiner Weise die Aufgabe der humanistischen, wie auch der Realgymnasien sei, daß die spezielle Berufsbildung vielmehr einzig dem späteren Studium auf der Universität oder der technischen Hochschule zugewiesen werden müsse. Die sogenannten höheren Lehranstalten hätten vielmehr nur die allgemeine Bildung zu vermitteln, d. h. diejenige Ausbildung der intellektuellen und ethischen Vermögen des Geistes, welche für jedes wissenschaftliche Studium als Grundlage und Voraussetzung diene.

Ist mit dieser Zweckbestimmung der zweiten der obigen Ansichten Recht gegeben, welche das Wissen einzig um seiner selbst willen schätzt, sollen wir also in den Schulen nur deshalb Mathematik lehren, weil diese für jeden Menschen von Interesse sein müsse, und die Kenntnis ihrer Lehrsätze, Entwickelungen und Methoden an sich zu einer allgemeinen wissenschaftlichen Bildung gehöre? Schwerlich dürfte diese Ansicht außerhalb des Kreises der Fachgenossen viele Vertreter finden, und man wird sich gegen dieselbe mit einem gewissen Rechte darauf berufen, daß es noch vieles gebe, was dem betreffenden Fachgelehrten als allgemein interessant, ja was in Wirklichkeit allgemein wissenswert

sei und trotzdem auf den höheren Schulen nicht gelehrt werde. Allgemeine Gesundheitslehre, Kulturgeschichte, Archäologie, Stenographie, und so manche andere wissens- oder könnenswerte Disciplinen klopfen schon lange an die Pforten unserer Lehranstalten, um Einlaß zu heischen. Sollen wir ihnen allen denselben gewähren? Die Folgen würden doch nur ungenügende Resultate oder wirkliche Überbürdung sein. Dem gegenüber werden diejenigen, welche den Zweck unseres Schulunterrichts in der Erzielung der allgemeinen Vorbildung für höhere Studien finden, erklären, daß das leider so oft mißbrauchte Wort allgemeine Bildung, soweit es hier inbetracht kommt, keineswegs ein bestimmtes positives Wissen auf bestimmten Gebieten, sondern allein die durch die Beschäftigung mit Geistesfragen gewonnene Befähigung zu wissenschaftlicher Arbeit und zum Verständnis ihrer Resultate bezeichne. Nicht deswegen also lerne man auf den Schulen Mathematik, um sich ein Wissen ihrer Lehren anzueignen, sondern um ein Können zu erwerben. Wenn dieses Ziel erreicht, wenn dem Lernenden die gewünschte geistige Schulung zuteil geworden, dann schade es nichts, daß das positive Wissen früher oder später wieder vergessen werde, denn als bloßes Mittel zum Zweck habe es seine Schuldigkeit gethan.

Man wird diese letztere Festsetzung im allgemeinen als die entschieden richtigere anerkennen müssen, denn Theorie und Erfahrung zeigen gleichmäßig, daß jene Befähigung der Entwickelung bedarf, und daß vor dieser Entwickelung nicht zu einem wissenschaftlichen oder auch einem Berufsstudium ohne ernstlichen Schaden geschritten werden kann. Es wird also als der wesentliche Zweck auch des mathematischen Schulunterrichts die Teilnahme an der allgemeinen Ausbildung der geistigen Kräfte des Schülers ohne besondere Rücksicht auf dessen künftige Berufswahl hingestellt werden müssen.

§ 4. Das positive Wissen.

Man muß sich jedoch auch hierbei vor Einseitigkeit hüten. Die Aufstellung eines rücksichtslos zu erstrebenden Zieles schließt keineswegs aus, daß neben dem Hauptzwecke auch Nebenzwecke erreicht werden können, wenn diese dem ersteren nicht im Wege stehen oder vielleicht denselben fördern helfen, falls sie nicht gar für ihn unentbehrlich sind. Und dieser Fall liegt hier in der That vor.

Das positive Wissen liefert das Material, an welchem die Übung der geistigen Kräfte erzielt wird, und dasselbe ist deshalb während der Schulzeit, wenn auch nicht als Zweck, so doch als Mittel nicht zu entbehren. Die Art des Aufbaus des mathematischen Systems erfordert hierbei, daß die auf den unteren und mittleren Stufen erworbenen Kenntnisse im wesentlichen bis zum Abschluß des Unterrichts erhalten bleiben. „Ohne eine gewisse Höhe der Kenntnisse können die mathematischen Erkenntnisformen nicht zum Bewußtsein und zur sicheren

Verwendung gebracht werden.“ (Instruktionen f. d. Unt. a. d. Gymn. Österreichs.) Schon aus diesem Grunde ist auch auf ein sicheres und nachhaltiges Wissen entschiedener Wert zu legen.

Sodann ist es nicht richtig, daß die höheren Lehranstalten absolut gar keine Rücksicht auf den zukünftigen Beruf zu nehmen haben, sondern nur daß dies, der Natur dieser Schulen nach, nicht einseitig für einzelne, bestimmte Studien geschehen kann. Jedes wissenschaftliche Fach erfordert zu seiner erfolgreichen Betreibung im gereifteren Alter gewisse Vorkenntnisse, welche schon in früherer Jugend erworben und fest begründet sein müssen, weil dies der betreffenden Altersstufe entspricht, und weil der Hochschule die Zeit fehlt, auch diese elementaren Grundlagen in den Bereich ihres Unterrichts zu ziehen. Woher soll beispielsweise der zukünftige Mathematiker seine Kenntnis der Elementarmathematik, die unerläßliche Vorbereitung auf das akademische Studium nehmen, wenn er dieselbe nicht auf der Schule erwirbt? Und da die Wahl des Berufes mit Sicherheit meist erst bei oder kurz vor dem Abgange von der Schule erfolgt, und nicht immer blos durch Neigung und Anlagen, sondern auch durch äußere Verhältnisse bestimmt wird, so kann schon deshalb das im Vorbereitungsunterricht zu erwerbende positive Wissen Keinem im voraus erlassen werden.

Aber nicht blos der zukünftige Mathematiker bedarf heutzutage bestimmter Kenntnisse in den Elementen unserer Wissenschaft; zahlreiche andere Berufsarten und Wissenschaften setzen solche mathematische Kenntnisse voraus. Der Physiker betreibt zum großen Teil in seiner Wissenschaft angewandte Mathematik, der Naturforscher überhaupt, wenn er nicht blos experimentieren und beobachten, sondern Naturgesetze erkennen will, kann der Hilfe der Mathematik nicht entbehren. „Dies erklärt sich sehr einfach, denn ein Naturgesetz ist die Regel, nach welcher eine bestimmte Klasse von Naturerscheinungen vor sich geht; aber jeder Naturproceß erfolgt irgendwo, d. h. an einer oder mehreren Stellen des Raumes, er hat seinen bestimmten Verlauf in der Zeit, er kann endlich mit größerer oder geringerer Intensität, d. h. mit gradweiser Verschiedenheit auftreten — es ist daher ohne weiteres einleuchtend, daß man ein Naturgesetz nicht einmal präcis aussprechen, geschweige denn verstehen kann, ohne von den mathematischen Bestimmungen räumlicher, zeitlicher und graduell verschiedener Größen Gebrauch zu machen.“ *)

Dem Naturforscher schließt sich der Mediciner an. Seine Wissenschaft kann geradezu als eine angewandte Naturwissenschaft bezeichnet werden, und insbesondere erfordert das Studium der Physiologie heutzutage nicht ganz geringe mathematische Vorkenntnisse. Bezeichnend hierfür ist, daß namhafte medicinische Hochschullehrer eine Erweiterung

*) Schlömilch in der Vorrede zum Handbuch der Mathematik, Encyklopädie der Naturwissenschaften, Breslau, Trewendt.

und Vertiefung des mathematischen Lehrstoffes unserer Gymnasien als wünschenswert für das Studium ihres Faches bezeichnen, und daß amtliche akademische Gutachten von medicinischen Fakultäten in der sogenannten Realschulfrage den geringen Grad der mathematischen Kenntnisse bei den von Gymnasien kommenden Studenten schwer beklagt haben.

Selbst der Theologe, so fern auch sein Beruf der Anwendung mathematischen Wissens zu stehen scheint, kann dasselbe nicht allewege entbehren. Man mag über die Frage der Schulaufsicht denken, wie man will, man wird doch jedenfalls das zugeben müssen, daß an kleineren, vom Verkehr entlegenen Ortschaften nicht selten nur der Geistliche, als einziger hinreichend allgemein gebildeter Bewohner des Ortes zur Übernahme der lokalen Schulaufsicht geeignet erscheinen wird. Soll er diesen Posten erfolgreich ausfüllen, so darf er nicht der Gefahr ausgesetzt sein, daß der ihm untergebene Volksschullehrer sich mit Recht als ihm in Fragen der Schule und des Unterrichts überlegen betrachten dürfe. Auch die Volksschule behandelt das Rechnen und sogenannte Formenlehre, gar mancher Elementarlehrer findet gerade in der Beschäftigung mit elementar-mathematischen Studien Freude und Anregung. Ihm darf der Vorgesetzte nicht als Ignorant in diesen Dingen entgegentreten, und auch die dürftigsten Anfänge mathematischen Wissens in der Volksschule stellen an den unmittelbarsten und darum einflußreichsten Aufseher derselben die Forderung eines weiteren Horizontes, der es allein ermöglicht, über Stoffbegrenzung, Methode und Ziele eines solchen Unterrichts maßgebend zu urteilen. Daneben ist der Geistliche nicht selten der Berater seiner Gemeinde auch in weltlichen Dingen, und es dürfte ihm schlecht anstehen, wenn er sich in dieser oder jener praktischen Frage unwissender zeigte, als beispielsweise ein durchreisender Handwerker, der den Unterricht einer guten Fortbildungsschule genossen hat.

Am wenigsten unter den Zöglingen der akademischen Fakultäten scheinen die Juristen und die Philologen bestimmter Kenntnisse in der Mathematik zu ihrem Berufe zu bedürfen. Wenn auch den ersteren hier und da in ihren Akten Rechnungen vorkommen, so genügt doch, wie wenigstens dem Verfasser dieses Buches von hervorragenden Juristen entgegnet wurde, hierfür die Thätigkeit der Subalternbeamten. Da wir hier nur von dem Werte positiven Wissens für die einzelnen Berufsarten reden, so kann uns der Hinweis darauf, daß gerade die geistige Thätigkeit des Richters mit der des Mathematikers die größte Verwandtschaft hat, und daß jene durch die Betreibung der Mathematik eine entschieden nutzbringende Vorschulung erhält, an dieser Stelle nichts helfen, und wir müssen daher hier von den genannten Herren absehen. Der Philologe aber, der Lehrer an unseren höheren Schulen, nicht selten sogar der maßgebende Leiter derselben, sollte gewiß durch hinreichende Kenntnisse auch im mathematischen Fache zu richtiger Wertschätzung der einzelnen Unterrichtsdisciplinen, ihrer ein-

ander ergänzenden Bedeutung für die allgemeinen Ziele der Schule und ihrer Rückforderungen an die anderen Fächer befähigt sein, um an seinem Teile mitwirken zu können, daß jedem einzelnen Unterrichtsgegenstande die ihm gebührende Stellung und Einwirkung im Einzelnen gewahrt bleibe. Daß dies von seiten der Philologen nicht immer der Fall gewesen, daß im Gegenteil der mathematische Unterricht zuweilen von der Majorität eines Lehrerkollegiums oder von dessen Leiter hat Nichtachtung und Zurücksetzung erfahren müssen, ist schon manchmal bitter beklagt worden. Bezeichnend hierfür ist die ihrerzeit viel erzählte Anekdote von jenem Schuldirektor, der auf die Frage, wie er es anfange, so ausgezeichnete Leistungen seiner Schüler in den alten Sprachen zu erzielen, geantwortet haben soll: „Ich habe, Gott sei Dank, einen schlechten Mathematiker."

Es wird endlich kaum noch eines Hinweises darauf bedürfen, daß zahlreiche anderweite Berufsarten, zu welchen manche Schüler unserer höheren Lehranstalten übergehen, einer nicht ganz geringen mathematischen Vorbildung bedürfen, für welche diese Schulen die Grundlage zu liefern haben. Von dem Techniker, dem Baumeister, dem Feldmesser, dem höheren Forstbeamten, von dem Offizier, insbesondere dem Artilleristen und dem künftigen Zögling der Kriegsschule, wird mit vollstem Rechte schon bei dem Beginn ihrer speziellen Berufsstudien ein mehr oder minder großes Quantum elementarmathematischen Wissens verlangt. Selbst dem Künstler werden vielfach mathematische Kenntnisse nicht entbehrlich erscheinen: Der Maler wird nicht blos auf Grund genialer Naturanlage die Gesetze der Perspektive unbewußt oder routinemäßig befolgen, sondern dieselben klar zu erkennen streben; dem Tonkünstler wird die Kenntnis der auf mathematischer Grundlage ruhenden physikalischen Gesetze der Akustik zwar niemals in seinem künstlerischen Schaffen eine Förderung gewähren, allein diese Kenntnis wird ihm immerhin von hervorragendem Interesse sein.

Doch wozu diese Beispiele häufen? Aus dem Gesagten wird unzweifelhaft hervorgehen, daß der mathematische Unterricht der höheren Lehranstalten neben der Mitwirkung zur allgemeinen geistigen Ausbildung der Schüler auch die Aufgabe hat, denselben ein bestimmtes positives Wissen aus seinem Gebiete ins Leben mitzugeben. Ja, wenn auch alle jene Forderungen nicht vorhanden wären, welche der spätere Beruf mit Recht an die allgemeinen Vorbildungsanstalten stellen darf, so müßte dennoch die Mitteilung einer bestimmten Summe mathematischen Wissens als eine der Aufgaben des Unterrichts angesehen werden, weil dasselbe, wenn nicht um seiner selbst willen, so doch als Hilfsmittel für andere Gebiete der Erkenntnis mit der fortschreitenden Zeit immer weniger entbehrlich wird für die Gewinnung einer allgemeinen Bildung. Denn wenn als ein Bestandteil der letzteren die Befähigung anzusehen ist, „zum mindesten das Kulturleben seiner

Zeit und seines Vaterlandes mit Verständnis aufzufassen"*), so kann der gegenwärtigen Generation nicht mehr die mathematische Grundlage für dasjenige Wissen auf physikalischem Gebiete erlassen werden, ohne welches der Einzelne den Fortschritten der modernen Kultur nicht zu folgen vermag. In ähnlicher Weise sind die mathematischen Disciplinen „die unerläßlichen Hilfsmittel, um gewissen philosophischen Untersuchungen folgen zu können"**), ihre Kenntnis bis zu dem hierzu erforderlichen Grade ist also für jeden notwendig, der nicht auf eine entsprechende philosophische Bildung verzichten will.

In ähnlicher Weise äußern sich u. a. die Instruktionen für den Unterricht an den Gymnasien in Österreich: Die enge Beziehung der Mathematik zu den Naturwissenschaften und der mit unwiderstehlicher Gewalt wachsende Einfluß, welchen diese Wissenschaften auf die verschiedenartigsten menschlichen Verhältnisse und auf die meisten Faktoren des materiellen Wohlstandes des Volkes ausüben, findet in immer weiteren Kreisen Verständnis und Würdigung. Die Erkenntnis der Gesetze der Natur erlangt in demselben Maße Bestimmtheit, als sie Mathematik in sich aufnimmt und der Herrschaft derselben unterworfen werden kann; und mit der Einsicht der Gesetze der Natur geht die Herrschaft über die Natur in Künsten und Gewerben, in den mannichfaltigsten Lebensverhältnissen gleichen Schritt. Will also der Gebildete nicht überall auf Unbekanntes und Unbegriffenes stoßen, so kann er diese Wissenschaften nicht ignorieren: er muß streben, Einsicht zu gewinnen in die Principien, auf denen sie beruhen, und in die Methoden, durch die der menschliche Geist sie errungen hat.

Mit Recht wird daher von den Abiturienten auch der humanistischen Gymnasien der Nachweis verlangt, daß sie den durch das Prüfungsreglement angegebenen Grad mathematischen Wissens sich zu eigen gemacht haben, wenngleich auch hier das letztere nicht als die Hauptsache auftreten, vielmehr an und mit demselben vorzüglich die Erreichung des wesentlichsten Zweckes unseres Unterrichts, der formalen Bildung des Geistes, nachgewiesen werden soll.

§ 5. Die Förderung im sprachlichen Ausdruck.

Man hat den Satz aufgestellt, daß jeder Unterricht, welchen Gegenstand derselbe auch behandeln möge, zugleich ein Unterricht in der deutschen Sprache sein müsse, und gewiß gilt dies insbesondere auch für den mathematischen. Denn zunächst ist dieser dazu schon um seiner selbst willen verpflichtet, weil er zu dem richtig Gedachten auch den richtigen sprachlichen Ausdruck, und diesen in möglichst knapper und präciser Form zu verlangen hat. Der korrekte Ausdruck einer

---

*) Holzmüller in Hoffm. Zeitschr. XVI, S. 556.
**) Ref. d. 3. Schles. Direktorenkonf. 1873.

Wahrheit ist nicht blos ein Prüfstein für das richtige Verständnis derselben, sondern er erleichtert, ja er ermöglicht nicht selten dieses Verstehen und gewährt demselben die erforderliche Gründlichkeit und Sicherheit.

Die Mathematik ist ferner unter allen Schulfächern ganz besonders zu jener Förderung der Klarheit und bestimmten Kürze und Schärfe des sprachlichen Ausdrucks befähigt, während sie freilich für schwungvolle Rhetorik keinerlei Übung darbietet. Sie eignet sich in ersterer Beziehung durch die logische Schärfe ihrer Gedankenentwickelungen, welche jedes Abschweifen vom kürzesten geraden Wege von sich weist und leeren Phrasen niemals Eingang gestattet. Andere Fächer sind vorwiegend in anderen Beziehungen sprachbildend: die Übersetzungen aus fremden Sprachen in die Muttersprache üben im Auffinden des bezeichnenden deutschen Wortes für das gegebene fremde und in der Erkenntnis der Gesetze des Satzbaues, die Lektüre deutscher Dichter- und Prosaschriften giebt mustergiltige Vorbilder für zusammenhängende Darstellung und schöne Form der Rede, die Aufsätze der Schüler sollen diese in ebensolcher Darstellung eigener oder entlehnter Gedanken und ihrer Entwickelung üben, die Naturwissenschaften lehren das Beschreiben von Naturobjekten, Apparaten und Vorgängen, sowie die Darlegung von Gesetzen auf Grund unmittelbarer sinnlicher Anschauung. Aber alle diese Hilfen für die Übung im Gebrauche der Muttersprache, so wertvoll und unentbehrlich sie, jede in ihrer Art sind, bieten nicht in gleicher Weise wie die mathematische Schulung die Gewähr, daß nicht Worte unterlaufen, zu denen die Begriffe, wenn nicht ganz fehlen, so doch nicht hinreichend klar erfaßt sind, und sie geben nicht in gleichem Maße das, was der Mathematiker insbesondere als Präcision des Ausdrucks verlangt.

Allerdings ist es richtig, daß der mathematische Übungsstoff einem sprachlich eng begrenzten Gebiete entnommen, und daß außerdem gerade die Strenge der mathematischen Schlußfolgerung der Gewandtheit des Ausdrucks und der freien Gruppierung der Gedanken nicht besonders förderlich ist*). Eben deshalb schreiben wir ja auch dem mathematischen Unterricht für die sprachliche Ausbildung keine allseitig wirkende und für sich allein genügende Kraft zu, sondern betrachten ihn nur als eines von verschiedenen Hilfsmitteln, dessen Bedeutung jedoch deshalb nicht gering zu schätzen ist. Die Anleitung zu möglichster Einfachheit der Darstellung und die Übung in der Klarheit derselben sind gewiß nicht zu verachten, ebensowenig auch der Nutzen, daß sich „die Einfachheit der mathematischen Ausdrucksweise zu dem inhaltsleeren pathetischen Phrasentum, welches sich in den sprachlichen Aufsätzen gern breit macht, in einen heilsamen Gegensatz stellt". (Verhandlungen der zweiten Hannöverschen Direktorenkonferenz, 1879.)

---

*) Müller-Erzbach im Centralorgan f. d. Interessen des Realschulwesens X, S. 498.

„Bei den philologischen Unterrichtsfächern sind es vorzugsweise fremde Gedanken, die der Lernende wiederzugeben, und zwar in einer Form wiederzugeben hat, welche sich einer gewissen als mustergiltig aufgestellten Norm möglichst annähert. Das von andern Gedachte wieder zu denken und in einer von andern erreichten Form der Rede, oder in einer möglichst ähnlichen, d. h. nach Kräften ebenso korrekten und ebenso schönen Form wieder auszusprechen, das ist das Hauptaugenmerk des Lernenden beim sprachlichen, insbesondere beim philologischen Unterricht. Das Wort als das Kleid oder als die Form des Gedankens bildet den Centralpunkt, auf welchen sich alle Regeln und Gesetze beziehen, und welcher somit auch das Hauptkriterium der Leistungen liefert: wie man sagt — nicht was man sagt, ist die Hauptsache."*) „Der Schüler ist aber zugleich ein Mensch, mit fünf Sinnen und mit dem beobachtenden und vergleichenden Verstande von der Natur begabt, er kann und soll auch über Grund und Zusammenhang dessen, was er täglich außer seinen Büchern sieht und wahrnimmt, sich eine Meinung bilden und die Ergebnisse seiner Erwägung in die auch andern Menschenkindern zugängliche Form der Rede bringen lernen, auch aussprechen lernen, was er selber von einer Sache denkt und an ihr beobachtet, wie er selber ein Problem oder eine Frage sich zurechtlegt, wie er selbst es machen würde, wenn diese oder jene Forderung an ihn heranträte — oder wirklich herantritt. Denn gerade diese Seite der Geistesbildung ist es, welche im Leben vorzugsweise gebraucht wird. Daß im allgemeinen wenigstens der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht in dieser Beziehung ein nicht bloß heilsames, sondern ein gar nicht zu entbehrendes Gegengewicht gegen den vorherrschenden Dogmatismus, gegen das bloße korrekte Nachsagen fremder Meinungen, welches bei einem so großen Teil der andern Lehrfächer das Übergewicht hat, bilden könne und bilden solle, ist ja eine nicht bloß vielfach ausgesprochene, sondern heutzutage auch ziemlich allgemein anerkannte Wahrheit."*)

Wie notwendig dieses Gegengewicht ist, zeigt z. B. die Erfahrung, welche wohl alle Lehrer der Physik an Gymnasien in den obersten Klassen über die sprachliche Befähigung der Schüler machen, wenn es gilt, einen vorher genau erklärten, auseinandergelegten und in seiner Thätigkeit vorgeführten Apparat zu beschreiben oder den Gang und die Ergebnisse eines einfachen Versuches oder einer Erscheinung unmittelbar auf Grund der Beobachtung anzugeben. Derselbe Schüler, welcher vielleicht in seinen lateinischen Arbeiten ein

*) Aus dem sehr lesenswerten ausführlicheren Aufsatz von Oppel in der Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht I S. 394 ff.: „Über den Einfluß des math. Unterrichts auf sprachliche Bildung". Derselbe ist auch im Nachstehenden benutzt worden.

gutes ciceronianisches Latein schreibt, seine Klassiker fließend übersetzt und sogar „einen Anfang im Lateinsprechen" gemacht hat, derselbe Schüler, dessen deutsche Aufsätze ihres blühenden Stils halber gelobt werden, zeigt oft in den genannten Fällen eine ganz erschreckende Unbeholfenheit des sprachlichen Ausdrucks; seine Rede ist überaus stockend, er findet nicht die bezeichnenden Worte, und der Satzbau ist unkorrekt. Auch die medicinische Fakultät der Universität Halle bemerkt in ihrem Gutachten über die Zulassung von Realschulabiturienten zu Fakultätsstudien 1870: „Es ist auffällig, wie wenig die Studenten der Jetztzeit ihre Muttersprache beherrschen, und wie oft das, was sie in deutscher Sprache schreiben, stilistisch und logisch einen schülerhaften Eindruck macht."

Man darf hieraus nicht die Folgerung ziehen, daß demnach auch der mathematische Unterricht der Gymnasien sich nicht befähigt erwiesen habe, die Schüler im Gebrauche der Muttersprache zu fördern. Denn die Mathematik wirkt hierbei teilweise nach einer anderen Richtung als die Naturwissenschaften, und auch das mag richtig sein, daß das ältere Unterrichtsverfahren häufig die sprachlich bildende Kraft des mathematischen Unterrichts gar nicht ausgenutzt hat. Das aber ist klar, daß es unter den Lehrfächern der höheren Schulen keines giebt, dessen sachlicher Inhalt es dem Schüler in gleichem Grade, wie die Elementarmathematik, ermöglicht, selbständig Schlußfolgerungen zu ziehen, sich des Zusammenhangs derselben mit den Prämissen durchaus klar zu werden, und ein begrenztes Untersuchungsgebiet bis in seine fernliegenden Konsequenzen zu erschöpfen, und welches dabei ihn in gleichem Grade nötigt, das so Gedachte auch bestimmt und unzweideutig auszusprechen.

Wer einen guten Stil in erster Reihe in „schönen Redensarten, klassischen Wendungen, den Musterschriftstellern abgelernten Phraseologien oder gar in floskulöser Schreib- und Redeweise sucht, wird freilich in mathematischen Lehrbüchern und Unterrichtsstunden keine Förderer desselben erkennen. Wer dagegen als erste Erfordernisse eines guten Stiles Deutlichkeit, Unzweideutigkeit und Korrektheit erkennt, und jene anderen Eigenschaften erst in zweite Linie stellt, wird darüber anders denken." „Jenes vage Herumreden um eine Sache, jene bloß phrasenmachende Behandlung eines Gegenstandes, die auf andern Gebieten soviel Unheil stiftet, ist gewiß nirgends so klar und einfach zurückzuweisen, nirgends so leicht ihrer Haltlosigkeit und hohlen Nichtigkeit zu überführen, als beim Unterrichte in der Mathematik. Daß aber der Lernende seine Worte auf die Wage legen, sie dem auszudrückenden Gedanken vollständig und genau anpassen lerne, ist an sich schon ein so überaus wichtiges Ziel aller wahren Bildung, daß wir ohne Übertreibung sagen können, der größere Teil aller Mißhelligkeiten und Übel, von denen die sozialen Verhältnisse der Menschheit heimgesucht werden, wurzelt in dem noch immer viel zu weit ver-

breiteten Mangel jener Fertigkeit. Wie unendlich viel des Zankes und Haders beruht, im alltäglichen Leben, wie in der wissenschaftlichen Welt der Gelehrten, ja selbst in der Politik auf den sogenannten „Mißverständnissen", auf Worten und Äußerungen, bei denen man sich zugestandenermaßen gar nichts gedacht, d. h. nichts von dem, was der Hörer oder Leser sich dabei denkt, bei denen man also die Gabe des Wortes mißbraucht hat, die denn doch schließlich zu nichts anderem da ist, als die augenfällige Form des sonst unzugänglichen Gedankens zu sein! Und in wie hohem Grade müßte uns daher ein Unterrichtsgegenstand willkommen sein, der wie dazu geschaffen ist, jene Fähigkeit zu hegen und zu pflegen, und durch unablässige Übung sie zur Fertigkeit und Sicherheit herauszubilden?"

Indem der mathematische Unterricht in solcher Weise denjenigen in der deutschen Sprache unterstützt, hilft er eine Aufgabe erfüllen, welche die Grundlage unserer allgemeinen Schulbildung liefert, und es ist ihm deshalb nicht gestattet, sich der Mitwirkung an derselben zu entziehen. Denn die Fertigkeit in sicherem und präcisem Gebrauche der Sprache ist nicht nur eine der nützlichsten Mitgaben für das Leben und häufig eine Voraussetzung des Erfolges in öffentlichen Stellungen verschiedener Art, sondern sie ist auch eine Vorbedingung gediegener Leistungen in allen Berufsarten, welche zu ihrer Ausübung des gesprochenen oder geschriebenen Wortes bedürfen; sie giebt ferner auch eine Gewähr dafür, daß ihr Besitzer dem sprachlichen Ausdruck eines fremden Gedankenganges mit richtigem Verständnis zu folgen und denselben sich anzueignen vermöge. Die Leistungen der Abiturienten in der deutschen Sprache gelten mit Recht für den wichtigsten Maßstab der Befähigung zu wissenschaftlichen Studien. Nur sollte dieser Maßstab nicht bloß in der Gestalt des deutschen Aufsatzes angelegt werden, da dieser nur eine einseitige Ausbildung zu verbürgen vermag.

Will man gegen die vorstehende Auseinandersetzung einwenden, daß die auf mathematischem Gebiete erworbene Befähigung zu klarem und korrektem sprachlichen Ausdruck der Gedanken nicht auch notwendig die gleiche Befähigung auf anderen Gebieten nach sich ziehe, auf denen die Sachen selbst weniger klar und durchsichtig und deshalb weniger leicht und vollkommen erschöpfbar seien, so wird doch in diesem Fall wenigstens das als achtungswerter Erfolg bezeichnet werden können, wenn die Schüler gewöhnt sind, nicht mehr zu behaupten, als sie wissen, sich der Grenzen der Sicherheit ihrer Erkenntnis bewußt zu werden, und sich nicht durch leere Worte über den Mangel an Wissen hinwegzutäuschen oder von anderen täuschen zu lassen.

Auf welche Weise nun der mathematische Schulunterricht im einzelnen auf die Erzielung dieser Bildungsmomente hinwirken kann, soll später bei der spezielleren Besprechung der Methodik erörtert werden. Namentlich ist in dieser Beziehung auf den § 17 dieses Buches als Fortsetzung des vorstehenden zu verweisen.

§ 6. Die formale Verstandesbildung.

Kehren wir nun zu derjenigen Aufgabe des mathematischen Schulunterrichts zurück, welche vorher als die hauptsächlichste und maßgebende bezeichnet wurde, um derselben, ihrer Bedeutung entsprechend, eine etwas eingehendere Untersuchung zu widmen, so ist zunächst die Frage aufzuwerfen, nach welchen Richtungen der mathematische Unterricht befähigt und unentbehrlich sei für die Mitwirkung an der allgemeinen geistigen Ausbildung der Schüler.

Von allen Seiten wird in dieser Beziehung die formale logische Entwickelung des Verstandes an die Spitze gestellt und anerkannt, daß die Mathematik infolge der einzig in ihrer Art dastehenden Strenge in dem Aufbau ihres Systems, wie in der Beweisführung der einzelnen Sätze nach dieser Richtung vor anderen Unterrichtsfächern geeignet, ja unentbehrlich sei. Denn, wie Schrader (Erziehungs- und Unterrichtslehre, S. 59) sagt, „dieselbe erheischt und schafft genaue Begriffsbestimmungen und führt durch die Analyse der gefundenen Begriffe nach ihrem Umfange, wie nach ihrem Inhalte zu einer Reihe von Urteilen, welche sich sodann zu der strengen Form des Schlusses und des Beweises verbinden. Um so augenfälliger ist die Einwirkung der Mathematik auf die Entwickelung des Begriffsvermögens, als jene logischen Formen hier unverhüllt und in völliger Klarheit hervortreten und eben deshalb jeder Fehler gegen dieselben auch dem Schüler leicht erkennbar wird. Ebenso bietet der theoretische Unterricht in der Mathematik hinlänglich Anlaß zur Übung in der Einteilung und der Subsumtion, besonders finden aber diese beiden Formen bei der Lösung mathematischer Aufgaben ihre Anwendung."

„Bildet der mathematische Unterricht (in der Realschule) eine Gymnastik des Geistes, welche die Denkkraft weckt und übt und, indem sie die Fruchtbarkeit eines streng methodischen Verfahrens zum Bewußtsein bringt, das Produktionsvermögen stärkt, und bei welcher den Schülern eine mechanische Auffassung unmöglich, dagegen die Freiheit und Sicherheit des Blicks und Urteils zu eigen gemacht wird, welche die Entwickelung eines Satzes nach allen Seiten verfolgen kann und durch die Verschiedenheit der Form und Stellung, worin derselbe Gegenstand erscheinen mag, sich nicht beirren läßt, nur dann ist die Mathematik unter den ausschließlich formalen Bildungsmitteln (der Realschule) das wichtigste und wirksamste." (Wiese, Gesetzsammlung, S. 126.)

In ähnlicher Weise, wie diese beiden Stimmen, sprechen sich sämtliche preußische Direktorenkonferenzen aus, welche die betreffende Frage behandelt haben. Wie verschieden, ja zum Teil diametral entgegengesetzt die von diesen Versammlungen angenommenen Thesen über einzelne Fragen des mathematischen Unterrichts auch lauten, nach der vorliegenden Seite herrscht bei ihnen volle Übereinstimmung in der

Anerkennung der Wirksamkeit des fraglichen Lehrfaches, und nur das eine dürfte hierbei zu bemerken sein, daß der formal-logische Zweck des mathematischen Unterrichts nicht selten viel zu einseitig hervorgehoben wird.

Es wird kaum nötig sein, noch weiteres zur Begründung des Satzes hinzuzufügen, daß der mathematische Unterricht in hervorragender Weise zur Lösung der in Rede stehenden Aufgabe geeignet, und daß in derselben das Hauptziel dieses Unterrichts zu erblicken sei, denn es ist überflüssig, allgemein Zugestandenes zu beweisen.

Auch diejenigen stehen im Grunde auf demselben Standpunkt, welche sich dahin aussprechen, daß das Hauptziel des mathematischen Unterrichts nicht sowohl sei, ein Substrat der gemeinen Logik zu sein, als die Erkenntnis der mathematischen Grundwahrheiten anzustreben, denn hierdurch werde derselbe die Vorschule des wissenschaftlichen Erkennens und Erfindens überhaupt, wie das von Leibnitz auf das bestimmteste ausgesprochen sei*). Denn dieselben richten sich, wie uns scheint, nur gegen eine zu eng begrenzte Auffassung jenes Zweckes, und beabsichtigen gerade, demselben zu seiner vollendeten Anerkennung zu verhelfen. Die Instruktionen für den Unterricht an den Gymnasien Österreichs, welche nebenbei bemerkt zugleich mit den entsprechenden Instruktionen für die Realschulen ein in vielen Hinsichten ganz ausgezeichnetes Werk sind, sagen (S. 244) in dieser Beziehung ganz richtig: Viele Gebildete weisen der Mathematik im Unterrichte die karge Aufgabe zu, nur als praktische Logik die formale Bildung des Schülers zu fördern, sein Denkvermögen zu üben und zu kräftigen und ihn in der Kunst richtig zu schließen, durch wiederholte Anwendung von Schlußformen, die an sich höchst einförmiger Natur sind, zu unterweisen. — Dieselben finden dann eine der Erklärungen dieses in weiten Kreisen verbreiteten Irrtums in der Unkenntnis der großen Mannigfaltigkeit der geistigen Processe, Methoden und Ideen, welche die Mathematik in den verschiedenen dem Unterrichte der höheren Schulen zugewiesenen Gebieten aufschließt; der Unterricht in dieser Disciplin gebe dadurch nicht nur eine strenge Schulung des Schlußvermögens, sondern derselbe wirke vielseitiger, indem er die verschiedensten Fähigkeiten und Kräfte des Geistes ins Spiel setze.

Ebenso wird es nicht vieler Worte bedürfen, um den Einwand zurückzuweisen, daß zwar die Notwendigkeit und der hohe Wert einer derartigen Einwirkung auf die geistige Ausbildung der Schüler unbestritten sei, daß aber eine solche auch von anderer Seite, nämlich der Grammatik, und insbesondere derjenigen der lateinischen Sprache, ausgeübt werde, und daß somit der mathematische Unterricht mehr oder minder entbehrt werden könne. Denn auch das dürfte als fast allseitig

---

*) Vortrag von Gerhardt in der mathem.-naturw. Sektion der Leipziger Philologenvers. 1872.

zugegeben gelten, daß die beiden genannten Unterrichtsfächer in der gedachten Hinsicht durchaus nicht als gleichwertig gelten können, daß vielmehr beide ihre logische Wirksamkeit nach von einander abweichenden Richtungen entfalten. „In der Mathematik herrschen Gesetze, in der Grammatik nur Gebote. Jene sind beständig, diese wandelbar".*) In diesem Sinne spricht sich u. a. auch eine Stelle in den Verhandlungen der Hannöverschen Direktorenkonferenz von 1879 aus: „Kein anderer Unterricht (außer dem mathematischen) stellt gleich große Anforderungen an Abstraktion und stetige Anstrengung des Nachdenkens, in keinem anderen regiert so ausschließlich das Gesetz logischer Notwendigkeit, nirgendwo anders ist eine gleiche Zweifellosigkeit der Folgerungen und Klarheit der Thatsachen vorhanden, auch nicht in der Grammatik, die der Mathematik sonst als nächste Verwandte zur Seite steht. Wie manches in den Sprachformen erscheint als Willkür, auf wie manche Frage hat nur der sogenannte Sprachgebrauch eine Antwort, oder wie dunkel und tief verborgen doch, Schüleraugen kaum nahe zu bringen, liegen die Sprachgesetze! Wie oft wird sich dort der Schüler des Warum nicht bewußt, wie vieles bleibt allein mit dem Gedächtnisse aufzufassen übrig."

In der Thatsache, daß die formale Entwickelung des jugendlichen Verstandes von der höchsten Wichtigkeit, ja unerläßlich ist zur Erzielung praktischer und wissenschaftlicher Befähigung, und daß die Mathematik nach dieser Seite einzig in ihrer Art dasteht, liegt der zwingende Grund für die Aufnahme derselben in den Lehrplan jeder höheren Unterrichtsanstalt und für die berechtigte Gleichstellung derselben neben den anderen Hauptfächern.

§ 7. Die Übung des Anschauungsvermögens.

Gleichwohl wird davor zu warnen sein, dieser den Verstand bildenden Kraft der Mathematik eine zu ausschließliche Bedeutung beizulegen, denn unser Lehrfach vermag daneben, auch für die allgemeine geistige Ausbildung, noch anderes zu leisten. Im engsten Anschluß an das vorher Bemerkte steht seine Einwirkung auf das Anschauungsvermögen, insbesondere den Raumsinn, dessen Entwickelung und Ausbildung ja auch als ein Teil der Bildung des Verstandes angesehen werden kann. Diese Seite des mathematischen Unterrichts darf aus dem Grunde nicht gering geschätzt werden, weil der sprachlich-historische Unterricht dieselbe fast gar nicht zu berücksichtigen vermag und namentlich an den Gymnasien durch seine weit überwiegende Ausdehnung die Gefahr entstehen läßt, daß über der rein geistigen Ausbildung der Schüler diejenige der Sinne entschieden zu kurz komme. Außer der Mathematik wirken fast nur noch die Naturwissenschaften

*) Hoffmann, Zeitschr. f. math. und naturw. Unterricht XVI, S. 472.

und das Zeichnen für die letztere, jene jedoch zum Teil nach einer abweichenden Richtung, da ihren Körpern meist die gesetzmäßige Einfachheit der mathematischen Formen abgeht. Das Gleiche ist zum Teil bei dem Zeichenunterricht der Fall, der zudem auf den Gymnasien nur stiefmütterlich behandelt wird.

Diese Ausbildung des Raumsinns ist für die allgemeine Bildung durchaus nicht gering zu schätzen. Wie sehr das richtige Sehen gelernt werden muß, und wie wenig dasselbe bei einseitiger Beschäftigung mit den sogenannten Geisteswissenschaften entwickelt wird, zeigt das Beispiel manches Erwachsenen, welcher seinerzeit auf seinem Gymnasium ungenügenden Unterricht in Mathematik und Naturwissenschaften erhalten hat, zeigt die Unfähigkeit vieler Menschen bei nicht gewöhnlichen und nicht alltäglichen Vorkommnissen das Geschaute richtig aufzufassen. Abgesehen von dem Nutzen ausgebildeter Sinne im praktischen Leben bedürfen aber zahlreiche Berufsarten, auf welche unsere höheren Schulen vorbereiten, derselben.

Der theoretisch vollendetste Mediziner wird trotz aller Gelehrsamkeit niemals ein brauchbarer Operateur, wenn ihm die Sicherheit des Auges fehlt, und entsprechendes gilt für alle Lebensstellungen, welche mit der Welt der Dinge zu thun haben, die uns körperlich umgeben. Selbst die von der Materie möglichst losgelösten Wissenschaften können sich nicht immer der Veranschaulichung durch sichtbare Bilder entziehen, welche selbstverständlich richtig, d. h. mit Erkenntnis des Wesentlichen, gesehen sein wollen, und sogar für das Verstehen und Empfinden des Schönen in der Kunst ist ein gut ausgebildetes Auge erforderlich.

Selbstverständlich soll nicht behauptet werden, daß die Beschäftigung mit mathematischen Formen die nach diesen Richtungen erforderliche oder wünschenswerte Übung und Entwickelung des Raumsinns fertig gewähre, allein unstreitig ist sie imstande, zu derselben mitzuhelfen und ihr eine wohl kaum ganz erläßliche Grundlage zu liefern. Es würde auch Thorheit sein, zu behaupten, daß eine solche Grundlage und Übung nur mit Hilfe der mathematischen Formen und Gesetze möglich, und nicht auch auf anderen Wegen zu erreichen sei. Die Erfahrung würde dem widersprechen, denn es ist eine Thatsache, daß hinreichend, ja gut entwickelte Wahrnehmungs- und Beobachtungsgabe häufig auch bei solchen gefunden wird, denen keine systematische Schulung derselben durch Unterrichtsgegenstände zuteil geworden ist. Die Welt der Körper und der Naturerscheinungen greift eben so vielseitig und ununterbrochen in das Leben des Einzelnen hinein, daß natürliche Anlage und besonderes Interesse für die Beobachtung derselben stets hinreichende Gelegenheit zur Entwickelung finden. Aber ist es deshalb gerechtfertigt, diese Entwickelung dem Zufall zu überlassen, und nicht von denjenigen systematischen Bildungsmitteln Gebrauch zu machen, welche sich im Unterricht fast ungesucht, ohne jeden Zwang und fast ohne Mühe von selbst ergeben? Kann die Thatsache, daß es Menschen

giebt, die ihren Weg auch ohne besondere Hilfe allein zu finden wissen, dafür entschuldigen, daß man auch die anderen, mehr oder minder Hilflosen sich selbst überläßt, ja wird es nicht zweckmäßig sein, auch jenen ersteren das Betreten des kürzesten Weges zu erleichtern?

Man wird endlich auch den hygienischen Nutzen der Übung des Auges heutzutage nicht verachten, welcher darin liegt, daß der Schüler im mathematischen Unterricht nicht bloß auf das immer gleich nahe gehaltene Buch, sondern auch nach der entfernteren Tafel zu sehen hat. Mag man auch hierin gerade keine Aufgabe des mathematischen Unterrichts erblicken, so darf sich der Lehrer desselben doch immerhin der Thatsache freuen, daß seinem Unterricht der Vorwurf erspart bleibt, durch stete einseitige Thätigkeit des Auges das viel beklagte Überhandnehmen der Kurzsichtigkeit zu befördern, und es wird auch nichts schaden, wenn die Aufmerksamkeit des Lehrers darauf gerichtet wird, daß er durch fleißigen und wechselnden Gebrauch der Wandtafel dazu beitragen kann, diesem Sehfehler in etwas entgegenzuwirken.

§ 8. Die Übung des Gedächtnisses.

Die Übung des Gedächtnisses, um auch diese noch zu erwähnen, kann, insofern man unter demselben die Befähigung zu mechanischem Auswendiglernen versteht, in keiner Weise eine Aufgabe des mathematischen Unterrichts sein. Es liegt in der Natur des letzteren, daß derselbe, soll er seine höhere Aufgabe der logischen Verstandesbildung nicht schädigen, nicht durch das Gedächtnis, sondern durch das Verständnis zu wirken hat. Das Auswendiglernen mathematischer Lehrsätze und Beweise, durch welches wohl hier und da denkträge Schüler scheinbare Erfolge zu erzielen versuchen, würde nicht geistbildend, sondern geisttötend wirken. Auch ist ja für jenes mechanische Gedächtnis durch andere Unterrichtsgegenstände so reichlich gesorgt, daß vielmehr bei den Schülern unserer höheren Lehranstalten die Gefahr entsteht, daß dasselbe eine zu vorwiegende Anwendung beim Lernen finde, und daß man sogar eine Aufgabe des mathematischen Unterrichts darin finden kann, dieser Gefahr entgegen zu wirken.

Gleichwohl kann man nicht sagen, daß der mathematische Unterricht des Gedächtnisses gar nicht bedürfe, und daß er demselben eben durch seine Art der Inanspruchnahme nicht eine Übung und Förderung zuteil werden lasse. Soll doch, wie oben gezeigt, auch das in diesem Unterricht Gelernte mehr oder minder dauernd erhalten bleiben. Beispielsweise wird die Kenntnis der trigonometrischen Formeln behufs ihrer geläufigen Anwendung schließlich eine gedächtnismäßige werden müssen. Der Unterschied liegt nur in der Art der Einprägung: nicht mechanisch auswendig gelernt sollen die Formeln, Lehrsätze und Beweise der Mathematik werden, sondern durch die Kenntnis und das Verständnis ihrer Ableitung aus vorhergegangenen Lehren, sowie durch

zahlreiche, oft wiederholte Anwendung sollen dieselben geläufig werden. Der Unterschied ist wichtig genug, um ihn durch ein spezielles Beispiel zu erläutern.

In einem Schriftchen, welches die Erleichterung des trigonometrischen Unterrichts in den kgl. sächsischen Schullehrer-Seminarien bezweckte, fand Verf. vor Jahren folgende Anweisung, um sich die Formeln zur Berechnung der Winkel eines Dreiecks aus den Seiten mittels des Kosinussatzes, also die Formel

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

und die entsprechenden für die anderen Winkel einzuprägen: „Jede der 3 Formeln enthält 6 Buchstaben, und zwar 2mal die 3 ersten Buchstaben des Alphabets. Sie bilden zweimal die alphabetische Reihenfolge, nur jedesmal mit einem andern Buchstaben anfangend, nämlich *Abc abc*, *Bca bca*, *Cab cab*." — Man sieht, daß der Verfasser dieser Anweisung nicht einmal das rein mechanische Auswendiglernen der drei Formeln verlangte, sondern vielmehr dasselbe durch eine Art von mnemonischem Hilfsmittel ersetzen wollte. Für den kundigen Lehrer der Mathematik ist gleichwohl ein solches Verfahren in den meisten Fällen geradezu komisch, oder vielmehr bedauerlich. Derselbe kann von seinen Schülern verlangen, daß sie auf Grund ihrer früher erworbenen Fertigkeit im behenden Auflösen einfacher Gleichungen imstande sind, die vorstehende Formel für $\cos A$ ohne Besinnen aus dem vorher hinreichend eingeübten Kosinussatze

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \, . \cos A$$

aufzusagen oder hinzuschreiben, und zwar rascher, als wenn sie erst in ihrem Gedächtnis nach dem vielleicht schon etwas unklar gewordenen mnemonischen Hilfsmittel suchen müssen. Auch diese Thätigkeit der raschen Auflösung der bekannten Gleichung auf die jeweilig gesuchte Unbekannte (und zwar im Kopfe) wird bald infolge häufiger Wiederholung unterbleiben können; die Formel für $\cos A$ wird durch den Gebrauch von selbst gedächtnismäßig behalten werden. Läßt dann aber im Laufe der Zeit aus Mangel an fortgesetzter Übung dieses Gedächtnis im Stich, so tritt sofort jene Ableitung aus der früheren Gleichung wieder an seine Stelle. Schreiber dieses hat wiederholt bei jüngeren philologischen Kollegen, welche auf dem Gymnasium ihre Mathematik ordentlich gelernt hatten, die Erfahrung gemacht, daß dieselben, wenn die Unterhaltung zufällig auf einen speziellen mathematischen Gegenstand geriet, zunächst gestanden, daß sie die auf der Schule gut gewußte Sache wieder vergessen hätten, daß sie dann aber, nach erbetener kurzer Frist zum Besinnen, dieselbe ganz richtig angaben. Sie hatten eben, wie sie zugestanden, das verlangte Resultat sich rasch auf's neue entwickelt. Dagegen werden z. B. mechanisch auswendig gelernte Zahlen

und Daten, nachdem sie wieder vergessen worden, mangels solcher Anhaltspunkte und Entwickelungen nie wieder ohne erneutes Studium reproduziert.

Ebenso wird z. B. die Formel $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$ in der Weise gelernt, daß zunächst an einer Reihe quadratischer Gleichungen mit bestimmten Zahlen das Verfahren der Ableitung derselben im Einzelnen ausgeführt, dann erst diese Ableitung in allgemeiner Form, also an der Gleichung $x^2 + px = q$, entwickelt, und zuletzt die Anwendung wieder an einer Reihenfolge bestimmter Beispiele geläufig gemacht wird. Mit der Zeit wird so die Formel auch gedächtnismäßig behalten, während sie im Anfang, wie auch später im Falle der längere Zeit unterbliebenen Auffrischung, jedesmal rasch neu gebildet wird. Der Schüler soll eben geläufig wissen, daß er (das Verfahren mittels der quadratischen Ergänzung vorausgesetzt) durch Addition von $\frac{1}{4}p^2$ zu beiden Seiten das Quadrat von $x + \frac{1}{2}p$ erhält, und also in der Lage sein, ohne Besinnen daraus die Angabe zu machen, daß man aus $\frac{1}{4}p^2 + q$ die Quadratwurzel ausziehen und dann noch das Glied $\frac{1}{2}p$ mit dem entgegengesetzten Vorzeichen auf die andere Seite setzen muß.

So wertvoll die Gabe des mechanischen Gedächtnisses ist, welche es ermöglicht, einmal Wahrgenommenes leicht, dauernd und treu zu behalten, und so sehr die praktische Nützlichkeit einer Ausbildung derselben anzuerkennen ist, so wenig vermag dieselbe für sich allein die Früchte des Unterrichts an positivem Wissen zu sichern, denn sie ist zum Teil eine Naturanlage, welche nicht erzwungen werden kann. Von allgemeinerer Wirkung ist das oben geschilderte Verfahren, welches darauf beruht, daß die einzelnen Glieder durch einen Faden verbunden werden, mittels dessen jedes folgende seine Stütze an den vorhergehenden erhält. Indem der mathematische Unterricht diese letztere Kunst des Gedächtnisses übt, trägt er auch hierdurch, wie durch die Erfüllung seiner vorher genannten Aufgaben, dazu bei, dem Schüler eines der wertvollsten Güter ins Leben mitzugeben, welche die Schule zu geben vermag, und das wir mit schlichten Worten nennen können: die Kunst zu arbeiten.

§ 9. Schlußbetrachtungen über die Aufgabe des mathematischen Unterrichts.

Auch nach noch anderen Seiten kann ein guter mathematischer Unterricht zur Förderung der Schüler beitragen. Die Übung in möglichst streng logischem Denken wird von selbst den Sinn für Wahrheit und Recht zu stärken imstande sein, denn jeder Fortschritt in dem Vermögen das richtig Gedachte von dem Falschen zu unterscheiden, jede Gewöhnung an Strenge der Gedankenentwicklung wird bei unverdorbenen Schülern auch die Befähigung und den Wunsch vermehren,

im Leben das Rechte zu erkennen und zu vertreten. Dieselbe Gewöhnung wird ferner dem leeren Spielen mit inhaltslosen oder halbverstandenen Worten, dem hohlen Phrasentum entgegenwirken, sie wird dazu beitragen, daß dem Schüler mehr und mehr die Wahrheit des Satzes einleuchte, daß „ein Begriff muß bei dem Worte sein". Dieselbe wird ferner, wesentlich unterstützt durch die Übung in der Anwendung des Gelernten auf die selbständige Lösung von Aufgaben, dazu beitragen, daß der Schüler einen Anfang in eigenem Denken mache, daß er also lerne, nicht blos Vorgedachtes nachzudenken, sondern auch die Richtigkeit fremder Gedanken durch begründetes eigenes Urteil zu prüfen und selbstthätig Gedanken zu schaffen, sie wird also mithelfen an der Erziehung zu geistiger Selbständigkeit und Freiheit.

Die bildenden und erziehenden Kräfte des mathematischen Unterrichts sind vielfach verkannt, jedoch auch von namhaften Seiten hervorgehoben und vertreten worden. So bemerkt z. B. ein Referat der 11. Westfäl. Direktorenkonferenz (1851): Der mathematische Unterricht hält den Schüler an, 1) das jedesmal Vorliegende scharf zu betrachten und in seinen Eigenschaften aufzufassen, d. h. er übt Beobachtungsgabe und klaren Ausdruck; 2) aus den wahrgenommenen Eigenschaften einen folgerechten Schluß zu ziehen und von diesem zu neuen Schlüssen zu gelangen, d. h. er übt und schärft das Urteilsvermögen; 3) aus dem Beweise der einzelnen Wahrheit das Urteil zu verallgemeinern; d. h. er übt das Abstraktionsvermögen; 4) selbst zu erkennen, daß er im Felde der Wissenschaft sich durch eigenes Nachdenken wesentlich zu fördern vermöge, d. h. er übt einen wohlthätigen Einfluß auf die moralische Kraft des Schülers.

Fassen wir unsererseits die in den vorstehenden Paragraphen besprochenen Aufgaben unseres Unterrichts noch einmal kurz zusammen, so gehen dieselben dahin, daß die Beschäftigung mit der Mathematik an den höheren Schulen in erster Reihe der logischen Verstandesbildung zu dienen hat. Daneben soll sie den Zöglingen die für eine allgemeine Bildung und als Grundlage späterer Berufsstudien notwendigen positiven Kenntnisse in der Elementarmathematik mitteilen, ihren Raumsinn entwickeln und sie im richtigen sprachlichen Ausdruck des richtig Gedachten üben. Geschieht dies alles in rechter Weise, so ergiebt sich die Lösung der übrigen Aufgaben, die Übung des Gedächtnisses und der Befähigung zu richtigem Arbeiten, die Weckung wissenschaftlichen Geistes und der Empfänglichkeit für das Schöne, die Pflege der Liebe zum Wahren und Rechten, die Erziehung zu geistiger Selbständigkeit und Freiheit, fast von selbst.

Die große Mehrzahl der vorstehend skizzierten Aufgaben ist nicht ausschließlich dem mathematischen Unterricht eigentümlich, derselbe teilt sie mit anderen, ihm in einzelnen derselben sogar überlegenen Unterrichtsfächern; sein Beruf ist nur die Mitwirkung an denselben, allein diese Mitwirkung erfolgt in eigener Art, sie ist eine nicht durch andere

Lehrgegenstände entbehrliche, sondern eine dieselben ergänzende. Das aber darf auch der Lehrer der Mathematik nicht vergessen, daß die erziehenden Kräfte seines Unterrichts immerhin mehr oder minder einseitige sind, daß die vollendete Ausbildung des Schülers nur durch harmonisches Zusammenwirken der verschiedenen Unterrichtszweige, eines jeden in seiner Art, erreicht werden kann. Wie der Lehrer der Mathematik volle Anerkennung und Würdigung des Wertes seines Unterrichtsfaches von seiten der anderen Kollegen erwarten und verlangen soll, ebenso muß er bereit sein, auch die eigenartige Bedeutung der anderen Disciplinen von seiner Seite zu würdigen und die Mathematik nur als ein Glied des größeren Ganzen zu betrachten, welches der Ergänzung durch die anderen bedarf und seine volle Kraft nur in friedlichem Wetteifer und durch gegenseitige Unterstützung zu entfalten vermag.

---

2. Kapitel.

Die Methode des mathematischen Schulunterrichts im allgemeinen.

§ 10. Allgemeine Vorbemerkungen.

Aus den im Vorstehenden angegebenen Zwecken und Zielen des mathematischen Schulunterrichts folgen unmittelbar die Grundsätze für die Art seiner Behandlung in unseren höheren Schulen. Vor allem ist die möglichste logische Strenge der Entwickelungen zu verlangen. Weil aber der Sinn und das Verständnis für dieselbe nicht vorauszusetzen, sondern eben erst durch den Unterricht zu erwecken sind, muß dieser möglichst verständlich und klar sein und sich den verschiedenen Altersstufen der Schüler, der fortschreitenden Entwickelung ihrer geistigen Kräfte anpassen. Er muß die Schüler zum Mit- und Selbstdenken anregen und anleiten, ihre eigene geistige Thätigkeit fortdauernd in Anspruch nehmen, und derselben durch geeignete und hinreichend zahlreiche Übungen Gelegenheit zur Entwickelung geben. Das Gelernte muß ferner bis zur Sicherheit und zu dauerndem Besitze eingeprägt, und es muß die richtige Art des Lernens und des gedächtnismäßigen Behaltens gezeigt und geübt werden. Der Unterricht muß ferner anschaulich sein und durch stete Bezugnahme auf bestimmte und wechselnde, sichtbar dargestellte Konstruktionsresultate das Auge üben; er muß endlich eine mustergiltige Präcision des sprachlichen Ausdrucks durch Vorbild, Übung und Gewöhnung zu erreichen streben. Sehen wir nun im Einzelnen zu, auf welchen Wegen diese Grundsätze zu verwirklichen sind.

Einem oberflächlichen Beobachter des mathematischen Schulunter-

richts könnte scheinen, als ob demselben zur Erreichung seines oben an die Spitze gestellten Zweckes eine reiche Anzahl allgemeiner Methoden zu Gebote stehe, von denen jede ihre mit berechtigten Gründen auftretenden Verfechter besitze. Denn eine Fülle bezüglicher Benennungen tritt uns in pädagogischen Abhandlungen über die Elementarmathematik entgegen: synthetische und analytische, genetische und euklidische, heuristische und dogmatische Methode ringen anscheinend um die Siegespalme mit einander. Bei näherer Betrachtung will es jedoch scheinen, als ob die Begriffe dieser Methoden nur selten scharf genug hingestellt und unterschieden würden. Wenn man beispielsweise liest, daß jemand die genetische Methode für den Schulunterricht verwerfe, weil er die heuristische für vorzüglicher halte, so muß der genaue Kenner jedenfalls erstaunt fragen, ob denn genetisch und heuristisch ein Gegensatz, und ob es nicht möglich sei, genetisch und heuristisch zugleich zu verfahren. Da nun eine vergleichende Untersuchung über den größeren oder geringeren Wert einer Methode nur auf Grund einer scharfen Begriffsbestimmung und Unterscheidung von Erfolg sein kann, so dürfte es zweckmäßig sein, im nachstehenden jene verschiedenen Methoden an der Hand von Beispielen zu erläutern und klar zu stellen.

Zuvor sei bemerkt, daß dieselben keineswegs spezifisch mathematische, vielmehr allgemeinerer Natur sind. Sie finden demnach auch in anderen Unterrichtsfächern entsprechende Anwendung, und unsere Aufgabe im folgenden ist nur die Erläuterung derselben an dem Beispiel ihrer Ausführung im mathematischen Unterricht.

Das Unterrichtsverfahren eines längst verstorbenen Mathematikers älterer Schule, der längere Zeit hindurch eine hervorragende Stellung im höheren Schulwesen eingenommen haben soll, wurde von einem Schüler desselben dem Verfasser wie folgt beschrieben:

Zu Grunde gelegt war eine deutsche Übersetzung von Euklids Elementen. Nachdem der erste Lehrsatz derselben in der Stunde durchgenommen, wurde seine Wiederholung für die folgende Stunde aufgegeben. In letzterer mußten sämtliche Schüler nach einander den Lehrsatz und seinen Beweis wörtlich nach dem Lehrbuche aufsagen; denjenigen, welche dies ohne Anstoß konnten, wurde aufgegeben, für die nächste Stunde den folgenden Satz 2 aus dem Buche zu lernen, die es nicht konnten, erhielten statt dessen die Wiederholung von Satz 1 zur Aufgabe. In dieser Weise gestalteten sich nun alle folgenden Unterrichtsstunden. Dadurch daß bald dieser, bald jener Schüler seinen Satz einmal oder auch mehrere Male wiederholen mußte, während andere weiter gehen konnten, kam es dahin, daß jeder einzelne seinen bestimmten Satz zu lernen hatte. Die Thätigkeit des Lehrers bestand nun bloß darin, daß derselbe nach seinem Eintritt in die Klasse den zu oberst sitzenden Schüler durch einen Wink aufforderte, seinen Satz und Beweis herzusagen, dann den zweiten u. s. w. bis zum letzten. Wer seine Aufgabe gekonnt hatte, erhielt jedesmal durch ein besonderes

Zeichen den Auftrag, für die nächste Stunde weiter zu gehen; wer als nicht präpariert befunden wurde, erhielt durch ein anderes Zeichen die Weisung, denselben Satz noch einmal zu lernen. Auf diese Art konnte der Lehrer — und darauf war er stolz — eine ganze Stunde abhalten, ohne selbst nur ein einziges Wort zu sprechen.

Wir möchten das vorstehend geschilderte Verfahren die Auswendiglern- und Abhörmethode nennen und der Findigkeit eines Technikers anheimgeben, ob es nicht ausdenkbar wäre, mittels derselben die Arbeit des Lehrers ganz zu sparen und diesen durch eine zu ersinnende Kontrolmaschine zu ersetzen. Schwerlich wird heutzutage ein Lehrer gefunden werden, welcher diese Methode mit Bewußtsein befolgen möchte, und es ist selbst sehr wahrscheinlich, daß auch die obige Erzählung nur erdacht, oder wenigstens daß der wirkliche Vorgang durch Übertreibung sehr entstellt ist.

Dagegen bleibt es mindestens fraglich, ob nicht thatsächlich ein ähnliches Verfahren auch heute noch, wenngleich unbeabsichtigt, an einzelnen Stellen des Unterrichts vielfach vorkommt. Der denkträge Schüler — und welcher Schüler wäre nicht wenigstens zu Zeiten und in gewissem Grade denkträge — wird es häufig bequemer finden, seine Aufgabe rein gedächtnismäßig einzuprägen, als derselben durch inneres Erfassen des Gedankeninhaltes Herr zu werden; der gewissenhafte Schüler, der gern seine Schuldigkeit thun möchte, sieht überhaupt keinen anderen Weg hierzu, falls es dem Lehrer nicht gelungen ist, ihm den Gedankeninhalt klar zu machen. Überzeugt sich der Lehrer nicht davon, daß dies letztere geschehen ist, und begnügt sich derselbe bei der Wiederholung mit einer getreuen Wiedergabe desjenigen, was das Lehrbuch enthält, ja lobt er vielleicht gar diese Treue, so gerät er in Gefahr, unvermerkt in jene geisttödtende Dressurmethode zu verfallen.

§ 11. Die dozierende und die heuristische Methode.

Am nächsten liegt diese Gefahr bei der sogenannten dozierenden Methode. Um diese letztere und zugleich ihren Gegensatz, die heuristische Methode zu charakterisieren, sei im folgenden ein Beispiel der beiderseitigen Behandlungsweise aus

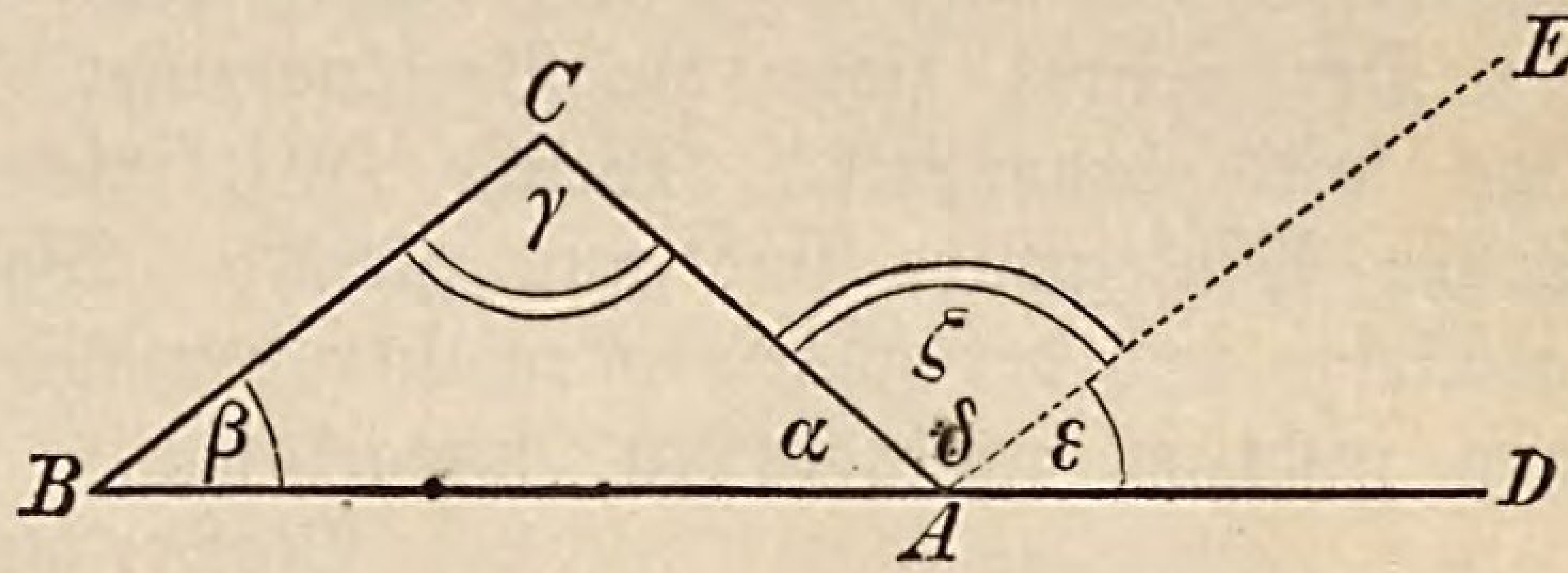
einer Lehrstunde in Quarta

aufgestellt. Wir wählen die Behandlung des Lehrsatzes: Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der ihm nicht anliegenden inneren Winkel.

a) Die dozierende Methode: Nachdem der Lehrer die Begriffe innere Winkel und Außenwinkel eines Dreiecks erklärt hat, zeichnet er ein Dreieck ABC an die Tafel oder läßt die betreffende Figur des Lehrbuchs von jedem Schüler aufschlagen. Er spricht dann den Lehrsatz aus und sagt, daß also die Behauptung $\sphericalangle CAD = ACB + CBA$

sei, zieht die Hilfslinie AE und trägt so weiter den ganzen Beweis den Schülern zusammenhängend vor. Darauf läßt er denselben von einem der besseren, dann vielleicht auch noch von einigen anderen Schülern mehr oder minder wörtlich wiederholen, wobei er nötigenfalls nachhilft, und giebt endlich den Satz und seinen Beweis für die nächste Stunde zur Wiederholung auf. In dieser Stunde werden dann beide in entsprechender Weise ein- oder mehrmal aufgesagt, worauf zum folgenden Lehrsatz übergegangen wird.

b) *Die heuristische Methode*: Der Lehrer zeichnet ein Dreieck ABC an die Tafel und stellt dann etwa folgende Fragen und Aufgaben an die Schüler, welche von denselben in möglichst buntem Wechsel zu beantworten sind: Wie viele Winkel hat ein Dreieck? Nenne einen Winkel des Dreiecks ABC! Ebenso einen zweiten und den dritten. — Der Lehrer zeichnet und erklärt einen Außenwinkel CAD. — Wer kann noch einen Außenwinkel zeichnen? Wiederholte Ausführung dieser Aufgabe durch je einen Schüler. Wieviele Außenwinkel kann man an einem einzelnen Eckpunkte des Dreiecks zeichnen? Wieviele Außenwinkel kann man im ganzen zeichnen? Was für Winkel



sind je zwei an demselben Eckpunkte liegende Außenwinkel ihrer Lage nach zu einander? Was ist also über die Größen dieser beiden Winkel bekannt? Wieviele an Größe verschiedene Außenwinkel kann ein Dreieck hiernach höchstens haben? Warum zählt man an jedem Eckpunkte eines Dreiecks *nur einen* Außenwinkel? Wieviele Außenwinkel hat *hiernach* ein Dreieck im ganzen?

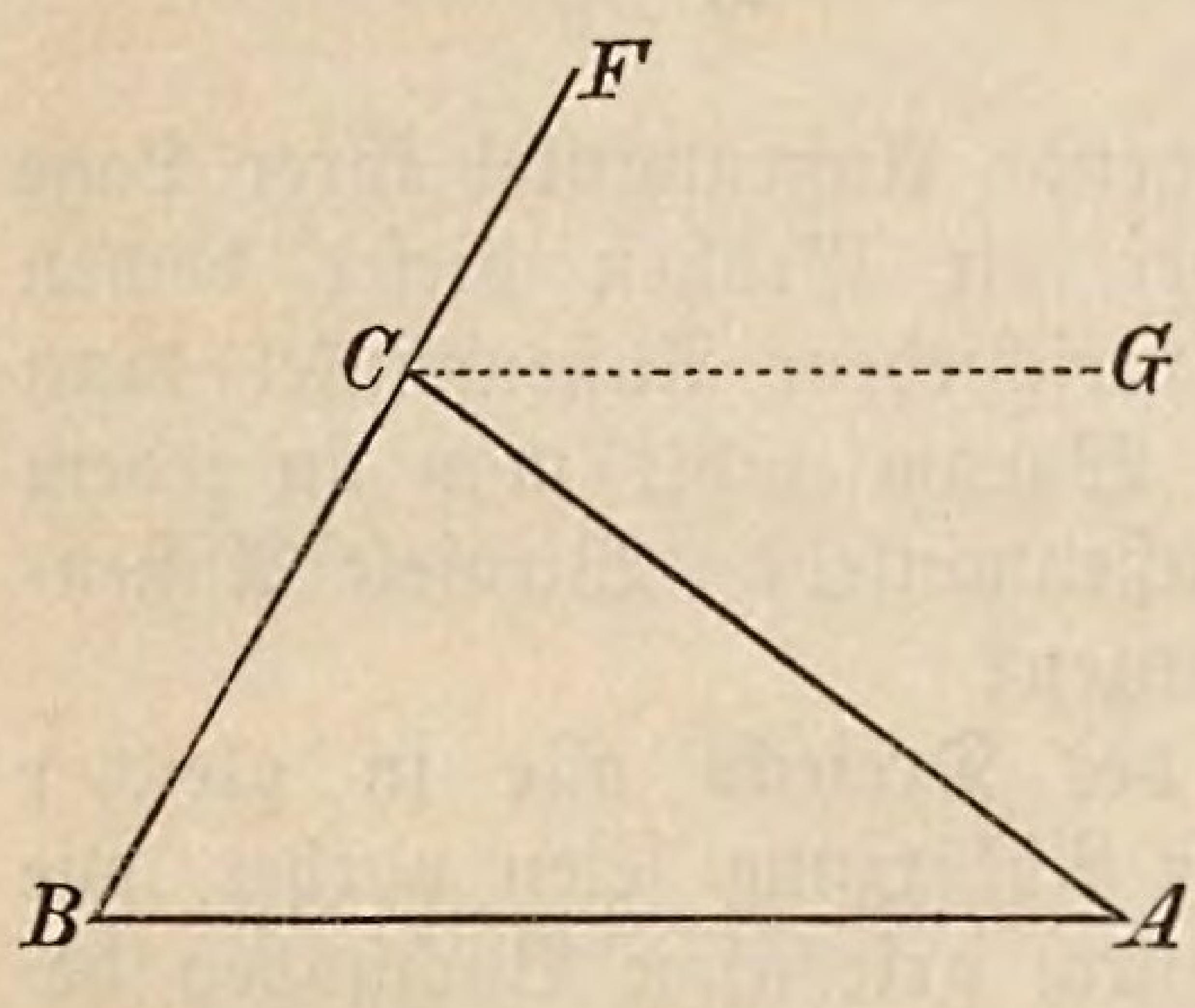
Liegen die drei inneren Winkel des Dreiecks alle in gleicher Weise gegen den Außenwinkel δ? (Zur Abkürzung seien vorher, wie in vorstehender Zeichnung, die Winkel durch griechische Buchstaben bezeichnet worden.) Welcher der Winkel α, β, γ liegt dem Außenwinkel δ an, welche liegen ihm nicht an? (Der Begriff aneinanderliegender Winkel ist schon vor den Nebenwinkeln erklärt worden.) Dieselben Fragen werden für jeden der Außenwinkel an den anderen Eckpunkten wiederholt. — Was für eine Art von Winkelpaar bildet je ein Außenwinkel mit dem ihm anliegenden inneren Winkel? Welcher Lehrsatz gilt also für zwei solche Winkel?

Es soll nun auch die Größe eines Außenwinkels mit den ihm nicht anliegenden inneren Winkeln verglichen werden. Sehen wir AC und BC als zwei nicht parallele Gerade an, die von einer dritten Geraden DB geschnittten werden! Was sind dann δ und β zu einander der Lage nach? Was δ und γ? Kann also $\delta = \beta$ oder $\delta = \gamma$ sein? Zur Vergleichung der Winkel werde deshalb, wie in

den entsprechenden früheren Sätzen, die Parallele AE zu BC gezogen, welche den Außenwinkel in die Teile ε und ζ zerlegt. Da AE parallel zu BC ist, so giebt es zu ε einen gleichen Winkel in der Figur; welcher ist es? Als was sind die Winkel ε und β gleich; welche Linien sind die Parallelen, welche ist die schneidende? Der Lehrer bezeichnet die gleichen Winkel durch einander entsprechende Bogenstriche. — Giebt es auch zu ζ einen gleichen Winkel in der Figur? Welcher ist es? Der Lehrer bezeichnet auch diese Winkel durch einander entsprechende Bogenstriche. — Warum sind diese Winkel gleich? Welche Linien sind die Parallelen? Welche Linie ist jetzt die schneidende? Da nun $\varepsilon = \beta$, $\zeta = \gamma$ ist, wie groß ist $\varepsilon + \zeta$? Wem ist also der Außenwinkel δ gleich? Welchen Lehrsatz haben wir also gefunden?

Der Beweis wird nun in synthetischer Form, bei schwächeren Schülern zunächst an derselben Figur, dann auch an einem anderen Außenwinkel desselben Dreiecks, oder auch an einem neuen Dreieck von anderer Gestalt und Lage wiederholt, etwa wie folgt:

Der Lehrer zieht die Verlängerung CF von BC und fragt: Was wird behauptet? Welche Hilfslinie zieht man zum Beweis? Welche Winkelpaare sind nun gleich? Warum? (Die Angabe der parallelen und der schneidenden Geraden wird jetzt, um den Gedankengang nicht zu unterbrechen, weggelassen.) Was folgt nun daraus? Machet nun den ganzen Beweis zusammenhängend noch einmal! (Ein Schüler trägt den ganzen Beweis vor. Wo es zur Sicherung der Aufmerksamkeit der übrigen notwendig erscheint, wird er mit einer an einen anderen Schüler gerichteten raschen Frage unterbrochen, z. B. bei der Angabe: Nun ist der Winkel FCG gleich CBA, kann der Lehrer einfallen: „Halt! Warum, N. N.?“



Dann, nach erfolgter Antwort, zum vorigen Schüler: Weiter!) In der nächsten Stunde werden dann noch eine oder mehrere Wiederholungen in analoger Weise vorgenommen, bis thunlichst alle Schüler imstande sind, den Beweis zusammenhängend vorzutragen.

Vergleichen wir nun beide Methoden mit einander, so ergiebt sich die dozierende als die unzweifelhaft rascher zum Ziele des Beweises führende. Sie ist im allgemeinen die Methode der Hochschulprofessoren und der wissenschaftlichen Schriften; sie ist deshalb insbesondere für den angehenden Lehrer die bei seinen eigenen Studien schon gewohnte, endlich ist sie für den unterrichtenden Lehrer ganz entschieden die bequemere, weniger anstrengende.

Aus diesen Gründen wird bei Anfängern im Unterrichten, welche frisch von der Universität kommen, nicht selten große Neigung vor-

handen sein, sich dieser dozierenden Methode zu bedienen, und auch solche, welche die heuristische kennen und als die für den Unterricht vorzüglichere ansehen, werden immer von der Gefahr bedroht sein, daß sie wider Willen an mehr oder minder zahlreichen Stellen ins Dozieren verfallen. Ob dasselbe den Inhalt des zu Lehrenden in eine wissenschaftlich bessere Form bringe, kann bezweifelt werden, aber auch wenn diese Frage bejaht würde, so ist doch bei einem Unterrichtsverfahren die andere, ob die Schüler durch dasselbe auch hinreichende Erfolge gewinnen, gewiß nicht minder wichtig.

Der dozierende Anfänger in der Lehrkunst wird in der Regel aus dem Mangel solcher Erfolge ersehen können, daß er nicht selten über die Köpfe seiner Schüler hinaus doziert hat, denn sein Verfahren entspricht nicht den allgemeinen pädagogischen Grundregeln, welche bei jedem Unterricht geistig noch nicht oder wenig gereifter Schüler zu beachten sind. Da dasselbe wesentlich auf dem Vortrag des Lehrers beruht, während dessen die Schüler rein receptiv sich verhalten, so fehlt ihm die Garantie des von seiten der letzteren entgegengebrachten Verständnisses, denn selbst wenn das letztere durch wiederholende Fragen geprüft wird, ist eine bloß gedächtnismäßige Wiederholung des soeben Gehörten oder zu Hause aus dem Buche Gelernten nicht ausgeschlossen. Das Schlimmste dabei aber ist, daß auch wenn der Schüler mit angestrengtester, ununterbrochener Aufmerksamkeit zuhören würde, und wenn der Vortrag der denkbar klarste und verständlichste ist, doch jede falsche oder fehlende Auffassung einer Prämisse das Verstehen der ganzen nachfolgenden Deduktion unmöglich machen kann.

Es bedarf keines Nachweises, daß die heuristische Methode, deren Wesen schon durch ihren Namen bezeichnet wird, in ganz anderer, vollkommenerer Weise den Lernenden zu eigener Thätigkeit heranzieht und dadurch ihn zugleich zur Aufmerksamkeit zwingt, sein Interesse und seine Teilnahme erregt, endlich eine viel sichrere Bürgschaft gewährt, daß das Gelehrte auch verstanden und behalten werde. Was nützt es, daß der dozierende Lehrer vielleicht ein großes Unterrichtspensum in sehr kurzer Zeit durchzuarbeiten vermag, wenn seine Schüler am Schlusse nichts von diesem Pensum oder nur Lücken- oder Mangelhaftes begriffen und behalten haben? Der Lehrer fängt dann, wenn es ihm Ernst ist mit der Erreichung seines Zieles, vielleicht wieder von vorne an, um abermals dieselbe Erfahrung zu machen und zuletzt wohl gar an dem Erfolge zu verzweifeln, nachdem seine Schüler schon längst in den mathematischen Stunden der Langeweile verfallen sind, auch wenn sie vielleicht anscheinend noch mit Aufmerksamkeit zuhören. Am schlimmsten wird natürlich die Sache, wenn der Lehrer sich überhaupt nicht durch öftere Wiederholungen von einem dauernden Erfolge seines Unterrichts zu überzeugen sucht, sondern in der Meinung, das dozierte Pensum sei auch gelernt worden, immer frisch drauf los weiter doziert.

Die in dem obigen Beispiel einer Unterrichtsstunde gestellten Einzelfragen werden manchem Anfänger im Unterrichten zum großen Teil als sehr überflüssig und in unnützer Weise zeitraubend erscheinen, weil er die Kenntnis ihrer Beantwortungen auch bei Schülern für selbstverständlich hält. Er wird sogar fürchten, durch solche, ihm selbst fast trivial erscheinende Fragen die Schüler nicht anzuregen, sondern zu langweilen und das Interesse, mangels eines raschen Fortschrittes zu Neuem, zu lähmen. Ein Versuch, in der angegebenen Weise zu unterrichten, wird ihn von der Irrigkeit dieser Ansicht überzeugen, er wird sehen, daß die große Mehrzahl der Schüler sich mit Lust und Liebe an der gemeinschaftlichen Diskussion beteiligt, daß dieselben wetteifern, die gestellten Fragen zu beantworten und sich freuen, etwas zu wissen und zu können. Er wird aber auch bemerken, daß einzelnen Schülern die Beantwortung dieser Fragen keineswegs selbstverständlich, sondern sogar schwer erscheint, und daß er sich um diese Schüler besonders bemühen und sie heranziehen muß. Er wird oft genug in die Lage kommen, über die gewaltige „Dummheit" einzelner Antworten auf seine Fragen zu staunen, zugleich aber auch sehen, wie dieselbe allmählich dem Verständnis weicht, und wie der anfangs langsame Fortschritt durch die Mithilfe der eigenen geistigen Thätigkeit der Schüler mit der Zeit immer rascher wird. Es wird nicht sehr lange dauern, bis wenigstens die besseren Schüler schon imstande sind, leichtere Entwickelungen ohne die vorausgegangene Hilfe des Lehrers ganz allein auszuführen.

§ 12. Die synthetische und die analytische Methode.

Von der Methode des Unterrichts ist die Methode der Beweisführung bezw. der Auflösung von Aufgaben zu unterscheiden. Wie dort die dozierende und die heuristische, so stehen sich hier die synthetische und die analytische Methode gegenüber. Zu ihrer Erläuterung sei als Beispiel ein Bruchstück aus einer stereometrischen Unterrichtsstunde in Sekunda oder Prima gewählt, und zwar die nicht ganz leichte Behandlung des Lehrsatzes: Gerade Linien, welche auf derselben Ebene senkrecht stehen, sind parallel. Als zunächst vorher behandelt, werden folgende Lehren vorausgesetzt*).

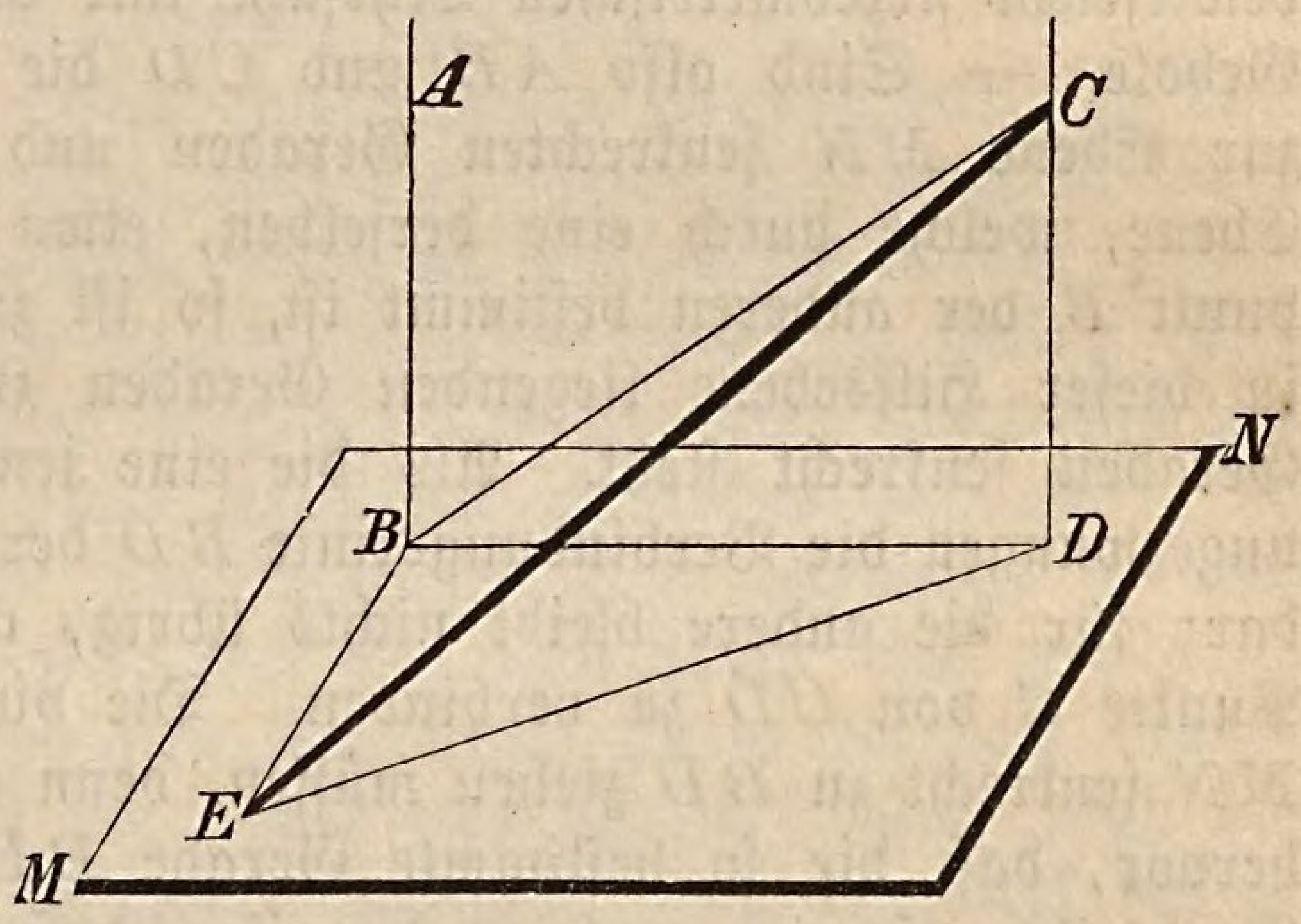
Eine Gerade, welche zu zwei Geraden einer Ebene senkrecht steht, ist senkrecht zu jeder dritten Geraden, welche in dieser Ebene durch ihren Fußpunkt gezogen werden kann. — Eine solche Gerade, welche also zu allen durch ihren Fußpunkt gehenden Geraden einer Ebene senkrecht steht, heiße eine Senkrechte zur Ebene. — Umgekehrt liegen alle Geraden, welche zu einer und derselben Geraden in demselben Punkte senkrecht stehen, in einer Ebene. — Auf einer Ebene läßt

*) Der Verfasser schließt sich hier seinem Lehrbuche „Elemente der Mathematik, Berlin G. Grote" an.

sich in demselben Punkte nur eine einzige senkrechte Gerade errichten. — Auf eine Ebene läßt sich von demselben Punkte nur eine einzige senkrechte Gerade fällen. — Dieselbe enthält die kürzeste aller Strecken, welche sich von jenem Punkte zu den Punkten der Ebene ziehen lassen. — Die Länge dieser Strecke nennt man den Abstand jenes Punktes von der Ebene.

Hieran soll sich also die Behandlung des obigen Lehrsatzes nach den beiden genannten Methoden anschließen.

a) Die synthetische Methode: Der Lehrer spricht den obigen Lehrsatz aus oder läßt ihn aus dem Buche vorlesen. Er erläutert dann denselben, nachdem er die zugehörige Figur an die Tafel gezeichnet hat, läßt die Schüler die Voraussetzung $AB \perp MN$, $CD \perp MN$ und die Behauptung: $AB \parallel CD$ angeben und fährt dann fort: Zum Beweise verbinden wir B mit D und errichten auf BD im Punkte B die in MN liegende Senkrechte BE. Sodann begrenzen wir die Linien CD, BE so, daß sie gleiche, im übrigen aber beliebige Längen erhalten. Die betreffenden Endpunkte seien (zur Vermeidung einer störenden Überhäufung der Figur mit Buchstaben) wieder durch C, bezw. E bezeichnet. Verbinden wir nun E mit D und C mit B, so sind die Dreiecke BCD und DEB kongruent. Diese Behauptung und den Beweis derselben werden die Schüler (um heuristisch zu verfahren) selbst liefern, und auf Befragen auch die Folgerung ziehen, daß $BC = DE$ sei. Der Lehrer läßt dann weiter die Linie CE ziehen, die Kongruenz der Dreiecke CBE und EDC beweisen und die Folgerungen $\sphericalangle EBC = CDE$, also $\sphericalangle EBC = R$ ziehen, macht dann darauf aufmerksam, daß EB auf den drei Geraden BA, BD, BC senkrecht stehe, bezw. läßt die Schüler dies finden und dann daraus folgern, daß diese Geraden und somit auch CD und AB in einer Ebene liegen, also die letzteren Linien, da sie einander nicht schneiden können, oder auch da sie in dieser Ebene beide auf BD senkrecht stehen, einander parallel sein müssen, womit der Lehrsatz bewiesen ist. — Der Beweis wird dann wohl noch mittels einer oder mehrerer Wiederholungen durch je einen einzelnen Schüler, bezw. durch Zusammenwirken der ganzen Klasse fester eingeprägt.



b) Die analytische Methode: Die Unmöglichkeit, von einem und demselben Punkte zwei senkrechte Gerade auf dieselbe Ebene zu

fällen, führt zunächst zu der Frage, welche Lage zwei Gerade zu einander haben werden, welche beide auf derselben Ebene, selbstverständlich in verschiedenen Punkten, senkrecht stehen. Daß dieselben einander nicht schneiden können, geht aus dem schon Gesagten hervor; darf hieraus schon gefolgert werden, daß sie — wie in dem analogen Satze der Planimetrie der Fall — einander parallel sein müssen? Es bleibt noch die andere Möglichkeit, daß sie einander kreuzen. — Welcher Nachweis wird zu führen sein, wenn diese Möglichkeit ausgeschlossen, also der Parallelismus der beiden Geraden bewiesen werden soll? Es wird gezeigt werden müssen, daß letztere in einer und derselben Ebene liegen.

Zu diesem Zwecke stellt sich bei einer Rückschau auf die bisher bewiesenen stereometrischen Lehrsätze nur der obige Umkehrungssatz zu Gebote. — Sind also AB und CD die beiden nach Voraussetzung zur Ebene MN senkrechten Geraden und konstruiert man diejenige Ebene, welche durch eine derselben, etwa CD, und durch den Fußpunkt B der anderen bestimmt ist, so ist zu zeigen, daß BA mit zwei in dieser Hilfsebene liegenden Geraden zugleich zu derselben vierten Geraden senkrecht steht. Als die eine jener zwei Geraden bietet sich ungezwungen die Verbindungslinie BD der Fußpunkte der Senkrechten dar; für die andere bleibt nichts übrig, als B mit einem beliebigen Punkte C von CD zu verbinden. Die vierte Gerade werden wir in MN senkrecht zu BD ziehen müssen, denn aus der Voraussetzung geht hervor, daß die so bestimmte Gerade BE auch senkrecht zu AB ist. Es bleibt also nur noch zu beweisen, daß auch der Winkel EBC ein rechter sein muß.

Zu diesem Zwecke bringen wir ihn in ein Dreieck CBE und suchen dessen Kongruenz mit einem rechtwinkeligen Dreieck zu beweisen. Ein solches bietet sich in dem Dreieck CDE dar, in welchem der Winkel CDE zufolge der Voraussetzung ein rechter ist, und welches mit EBC die Seite CE gemeinsam hat. Da die Länge von BE bisher willkürlich annehmbar war, so kann sie so bestimmt werden, daß auch $EB = CD$ ist. Es bleibt also nur noch nachzuweisen, daß die Dreiecke CDE und EBC noch in einem dritten Paare homologer Stücke übereinstimmen. Hierzu eignen sich die dritten Seiten BC und DE, welche bezüglich in den Dreiecken BDC und DBE liegen, deren Kongruenz sich schließlich aus ihrer Übereinstimmung in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel leicht nachweisen läßt. Hiernach kann also der Lehrsatz aufgestellt werden: „Gerade Linien, welche auf derselben Ebene senkrecht stehen, sind parallel", und sein Beweis gestaltet sich (in synthetischer Form) wie folgt.

Hieran schließt sich nun dieser Beweis in der im wesentlichen bei der vorigen Methode angegebenen Weise, und wie ihn auch das Lehrbuch behufs der häuslichen Wiederholung enthält. Dieser letztere Beweis wird schon von den nicht ganz ungeübten Schülern ohne

nennenswerte Hilfe des Lehrers selbständig ausgeführt werden können, während die vorher angegebene Entwickelung desselben selbstverständlich in der — hier der Kürze halber nicht durchgeführten — Form steter Frage und Antwort zwischen Lehrer und Schülern geschieht. In der Leitung dieser Entwickelung ruht innerhalb dieser Methode der Schwerpunkt der — vom Lehrbuche unabhängigen — Arbeit, des Unterrichts des Lehrers.

Vergleichen wir nun beide Methoden mit einander, so scheint für die erste der große Vorzug der Kürze zu sprechen. In knapper, präziser Form treten Lehrsatz und Beweis dem Schüler wie aus einem Gusse entgegen, ohne daß gleichwohl der Lernende nur aufnehmend thätig zu sein braucht; der zweiten Methode scheint dagegen eine gewisse Breite und Umständlichkeit anzuhängen. Dieser Schein dürfte jedoch bei näherer Betrachtung schwinden.

Dem nach der ersten Weise unterrichteten Schüler tritt die Linie BE ebenso wie die Forderung, daß CD gleich BE gemacht werde u. s. w., wie ein deus ex machina entgegen; wie jemand darauf kommen konnte, gerade diese Linie zu ziehen, diese Forderung zu stellen, bleibt unerklärt, das Ganze erscheint infolge dessen wie eine Art von Kunststück, oder wie die Frucht eines zufälligen glücklichen Gedankens, auf welchen irgend ein findiger mathematischer Kopf gekommen sei, und der Schüler muß sich jene Hilfslinie und ihre Länge rein gedächtnismäßig einprägen. Wird ihm sein Gedächtnis hierin bei dem Mangel an Anknüpfungspunkten auf die Dauer treu bleiben? Und wenn dies nicht der Fall ist, wird er später imstande sein, den verloren gegangenen Beweis durch eigenes Nachdenken wieder zu finden? Wir glauben auf Grund gemachter Erfahrungen diese Fragen unbedingt verneinen zu müssen. Die unausbleibliche Folge wird dann sein, daß zur Nachhilfe für das Gedächtnis, zu dauernder Befestigung des Gelernten eine große Anzahl von Wiederholungen erforderlich wird, wie sie in gleicher Menge bei der zweiten Methode nicht nötig sind, und daß somit der vermeinte Vorteil der Kürze in das Gegenteil umzuschlagen droht, ganz abgesehen davon, daß sehr häufige einförmige Wiederholungen leicht für Lehrer wie Schüler ermüdend wirken und mindestens bei einzelnen den schlimmsten Feind jedes Unterrichts, die Langeweile erregen.

Wie ganz anders verhält es sich bei der analytischen Methode! Dieselbe beruht, wie man sieht, darauf, daß dem synthetischen Beweise noch eine Entwickelung vorausgeschickt wird, welcher man den Namen Analysis der Beweise gegeben hat. In der That geschieht hier dem Wesen nach dasselbe, wie bei der wohl allgemein geübten Analysis der Aufgaben, insbesondere der Konstruktionsaufgaben. Hier tritt der Beweis dem Schüler nicht als fertiges, von einem anderen gemachtes Ganze fremdartig entgegen, sondern er entsteht vor seinen Augen und unter seiner Mitwirkung. Keine Hilfslinie wird gezogen, ohne

daß der Schüler einsieht, welchem Zweck dieselbe dienen soll, und durch welche Gedankenverbindung man zu derselben gelangt ist. Indem er so den ganzen Beweis an einem logischen Faden sich entwickeln sieht, lernt er nicht blos den Beweis, sondern auch das Beweisen, und hat er letzteres nicht nur in diesem, sondern auch in zahlreichen anderen Fällen geübt, so wird er noch lange nachher imstande sein, den Gedankengang zu wiederholen oder den verlorenen wieder zu finden. Eine Wiederholung des Gelernten wird man zwar auch dann nicht entbehren können, aber sie wird keine so häufige und eingehende zu sein brauchen, wie im anderen Fall.

Aber vielleicht ist das gedächtnismäßige Behalten der Beweise gar nicht notwendig? Wohl ist früher (§ 4) von uns gezeigt worden, warum das mathematische Wissen nicht durchaus zu demjenigen gerechnet werden kann, das man getrost wieder vergessen darf, da es genüge, dasselbe einmal gelernt zu haben, durch die betreffende geistige Schule gegangen zu sein. Dennoch kann es fraglich erscheinen, ob die dort angeführten Gründe nicht blos für die Resultate des mathematischen Unterrichts gelten, während es auf die Kenntnis der Wege, auf denen man seiner Zeit zu denselben gelangte, weniger ankomme. Gilt nicht für letztere der Satz, daß es gleichgiltig sei, ob man eine Übung an einem Turngerät des Verstandes auch später noch wiederholen könne, wenn nur seinerzeit durch diese Übung die gewünschte Kräftigung erzielt wurde?

Man kann diese Frage in manchen Fällen mit ja beantworten, im mathematischen Unterricht jedoch nur in sehr bedingter Weise. Die Kenntnis des Weges wird hier nicht selten in späteren Fällen notwendig oder erwünscht sein, in denen man bei ähnlichen Untersuchungen auch entsprechende Wege wandelt und eine Beziehung auf die früheren zur Abkürzung wie zur Klarstellung dient. Ferner wird mit dem Vergessen des Beweises auch vielfach das Gefühl der Sicherheit des durch denselben gewonnenen Ergebnisses Schaden leiden; dieses letztere selbst aber ist zum Aufbau des Systems vor dessen Beendigung meist durchaus nicht zu entbehren.

Wir gehen aber noch einen Schritt weiter, indem wir behaupten, daß die zweite Methode aus einem anderen Grunde ganz erheblich weniger Zeit beanspruche, als die erste. Schon vorher wurde erwähnt, daß durch jene nicht blos die Beweise gelernt würden, sondern auch das Beweisen. Jeder Fortschritt aber, welchen die Schüler in der Kunst des letzteren machen, erleichtert und verkürzt die folgenden Schritte. Manches, was sonst mit mehr oder weniger Mühe eingelernt werden muß, wird nun ohne Hilfe des Lehrers wie spielend überwunden, und die größere Anregung, welche die Schüler durch die ununterbrochene eigene Mitarbeit erlangen, das Gefühl klarerer Einsicht und eines gewissen Könnens, das gesteigerte Vertrauen endlich auf die eigene Kraft,

welches bei dieser Methode eher als bei der anderen an die Stelle eines mißmutigen „Ich kann das nun einmal nicht begreifen" tritt, alles dieses hat einen rascheren Fortschritt im Gefolge.

Zuletzt, das Letzte nicht das Geringste, betreffen alle diese Erwägungen gar nicht die Hauptsache. Diese letztere wurzelt in der Entscheidung der Frage: Welche Methode ist die geeignetste, die an die Spitze gestellten Zwecke des mathematischen Schulunterrichts, die Ausbildung des logischen Verstandes, der Befähigung zu eigenem richtigem Urteilen und Schließen, des wissenschaftlichen Sinnes und der Kunst des Arbeitenkönnens zu dienen? Uns scheint auch hier die Entscheidung aus den schon angedeuteten Gründen durchaus zu gunsten der analytischen Methode zu fallen, und dieser Entscheidung müßte die rein synthetische wohl auch dann weichen, wenn alle übrigen Gründe auf ihrer Seite ständen. Die Analysis führt gleichsam den Lernenden in die Werkstatt des geistigen Arbeiters und zeigt ihm durch das Beispiel den Weg zu eigener fruchtbringender Arbeit.

Zum Schlusse sei noch darauf hingewiesen, daß die beiden im Vorstehenden beschriebenen Methoden von den früher besprochenen Arten des Unterrichtsverfahrens, der dozierenden und der heuristischen, durchaus unabhängig sind. Allerdings paßt die synthetische am besten zur dozierenden, die analytische zur heuristischen Methode, und man wird daher auch dieselben in der Regel in dieser Weise verbunden finden, allein es kann auch das dozierende Verfahren auf analytische Entwickelungen, das heuristische auf synthetische angewendet werden. So ist, um auch dies kurz durch ein Beispiel zu erläutern, in der vorher angeführten Behandlung einer stereometrischen Unterrichtsstunde nach synthetischer Methode die zuletzt genannte Kombination angewendet gedacht, indem die Schüler veranlaßt werden, zu dem an die Spitze gestellten Lehrsatz und den ihnen angegebenen Hilfskonstruktionen die Begründungen der in synthetischer Weise aufeinander folgenden einzelnen Behauptungen, sowie die aus ihnen zu ziehenden Folgerungen selbst zu finden.

Es versteht sich wohl auch von selbst, daß die vier auf diese Weise möglichen Kombinationen der Methoden nicht immer rein durchgeführt sein müssen; man wird vielmehr annehmen dürfen, daß manche Lehrer, je nach der Beschaffenheit des vorliegenden speziellen Unterrichtsgegenstandes dieselben vermischt oder abwechselnd anwenden und vielleicht z. B. selbst innerhalb desselben Beweises bei einem Teile dozierend und synthetisch, bei einem andern heuristisch und analytisch verfahren mögen.

§ 13. Die Euklidische (dogmatische) und die genetische Methode.

Ein dritter Gegensatz in der Methodik endlich betrifft weder die Form des Unterrichts, noch die der Beweisführung u. s. w., sondern diejenige der Entwickelung der einzelnen Lehren aus einander und

ihrer Verbindung. Auf diesem Gebiete stehen die Euklidische und die genetische Methode einander gegenüber.

Bei dem oben kurz skizzierten Bruchstück einer stereometrischen Stunde ist bisher fast nur von der Analysis der Beweise und Lehrsätze gesprochen worden. Die beiden dort ausgeführten Behandlungsweisen unterscheiden sich von einander noch in anderer Hinsicht. Bei Euklid stehen bekanntlich die einzelnen Lehrsätze ohne jede aus ihrem inneren Zusammenhang hervorgehende Ordnung; das Prinzip, auf welchem ihre Reihenfolge basiert, ist nur das, daß kein Satz eher vorkomme, als die zu seinem Beweise dienenden anderen Sätze bewiesen sind. Im Gegensatz hierzu verlangt die neuere Methodik eine genetische Entwickelung der einzelnen Lehren, sie verlangt also, daß die einzelnen Teile des Systems auch unter einander, nach ihrem sachlichen Inhalt thunlichst in Zusammenhang gebracht, daß das Verwandte neben einander gestellt werde, das räumlich Nachfolgende auch inhaltlich als Folgerung oder weitere Entwickelung des Vorhergehenden erscheine, daß die Aufeinanderfolge der einzelnen Lehren sich aus dem Gegenstande derselben naturgemäß ergebe und jede Untersuchung auf die folgende als ihre Ergänzung zum Zwecke abschließender Behandlung des betreffenden Untersuchungsgebietes hinweise.

Es ist selbstverständlich, daß diese Forderungen unter der Bedingung zu erfüllen sind, daß das Euklidsche Prinzip durch dieselben nicht verletzt werde. Jeder Anfänger weiß, und die Vergleichung beliebiger Lehrbücher mathematischer Disciplinen kann dafür Belege liefern, daß die einzelnen Lehrsätze sich auf verschiedene Arten beweisen, die Aufgaben sich auf verschiedenen Wegen lösen lassen, je nachdem man andere, als vorausgegangen angenommene Sätze und Aufgaben zu Grunde legt. Der Aufbau des mathematischen Systems kann daher mit sehr verschiedenen Aufeinanderfolgen der einzelnen Lehren geschehen, wenn keine größere Anforderung an denselben gestellt wird, als diejenige, daß in keiner Schlußfolgerung ein Hinweis auf erst später zu Begründendes enthalten sei. Man wird daher dem Euklidschen System den Vorwurf der Künstlichkeit nicht ersparen können, wenn es nicht gelingt, den Nachweis zu führen, das dasselbe unter allen möglichen jener Reihenfolgen der einzelnen Lehren, wenn nicht die beste, so doch eine auf Grund bestimmter Prinzipien als hervorragend gut anzuerkennende angewendet habe.

In der That ist in verschiedenen neueren Lehrbüchern, welche sich in der Form der Darstellung mehr oder minder eng an das Euklidsche Muster anschließen, der Versuch gemacht worden, die Reihenfolge der Sätze mit Rücksicht darauf zu verändern, daß eine thunlichste Vereinfachung und Abkürzung der Beweise durch dieselbe ermöglicht werde. Dieses Prinzip verdient gewiß, auch im Interesse des Schulunterrichts, eine möglichst eingehende Berücksichtigung, allein dasselbe kann doch erst in zweiter Linie betont werden.

Denn es ist zunächst eine Konsequenz der Beibehaltung der Euklidschen Methode im Gegensatz zur genetischen, daß der Schüler nicht nur die einzelnen Sätze oder Aufgaben und ihre Beweise Stück für Stück lernen, sondern auch die Nummern derselben gedächtnismäßig behalten muß, nach denen sie im Buche auf einander folgen. Geschieht dies nicht, oder wird das Gedächtnis bei dem Mangel eines leitenden Fadens einmal untreu, so häufen sich bei Repetitionen die Fälle, in welchen der Schüler einen Satz mit Hilfe eines solchen beweisen zu können glaubt, der in dem gewählten System selbst erst mit Hilfe jenes anderen bewiesen wurde. Dies wird vermieden, wenn der Schüler gewöhnt wird, sich den genetischen Zusammenhang klar zu machen und aus ihm das Einzelne zu entwickeln. So ist es z. B. ja recht bequem und kurz, wenn in einem neueren Lehrbuche die Sätze über die Lagenbeziehungen zwischen einer Sehne und dem Kreismittelpunkte sofort auf die Sätze vom gleichschenkeligen Dreieck folgen, von denen sie unmittelbare Anwendungen sind; richtiger dürfte es jedoch sein, wenn dem Schüler das ganze Gebiet der Lagenbeziehungen zwischen einem Kreis und einer Geraden bis zu einer gewissen Grenze erschöpfend im Zusammenhang vorgeführt wird. Es darf nicht nötig sein, daß man, um eine Übersicht über diese Beziehungen zu erhalten, die verschiedenen Sätze über dieselben aus ganz entlegenen Abschnitten zusammensuchen muß, weil man z. B. die oben genannten beim gleichschenkeligen Dreieck, diejenigen über die Abhängigkeit der Längen der Sehnen von ihren Abständen vom Mittelpunkte (und umgekehrt) bei der Kongruenz der Dreiecke oder gar bei dem Pythagoreischen Lehrsatz, endlich diejenigen über Tangenten wieder in einem ganz anderen Abschnitte findet. Die Anordnung der Sätze blos mit Rücksicht auf die für dieselben gebrauchten Beweismittel ist und bleibt eben in jedem Falle eine künstliche.

Daher ist auch in dem obigen Bruchstück aus dem stereometrischen Unterricht nicht blos eine Analysis des Lehrsatzes ausgeführt, sondern es ist auch versucht worden zu zeigen, wie der letztere mit dem unmittelbar Vorhergehenden bewußt verknüpft werden kann, sodaß er als die Erfüllung einer Forderung erscheint, welche zur Ergänzung des Untersuchungsgebietes gestellt werden mußte. Nachdem nämlich als das Thema des letzteren die Untersuchung der Beziehungen zwischen einer Geraden und einer von ihr geschnittenen Ebene, bezw. den in letzterer zu ziehenden Geraden aufgestellt und sodann zunächst die Unterscheidung zwischen senkrechten und schiefen Geraden gewonnen war, mußte zuerst der einfachste Fall, die Betrachtung einer einzigen Senkrechten behandelt werden. Die dann auftretende Frage nach den Lagenbeziehungen bei zwei oder mehreren solchen Senkrechten führte nach der Erkenntnis, daß solche niemals durch einen und denselben Punkt möglich sind, naturgemäß auf die Untersuchung von zwei Geraden, die in verschiedenen Punkten auf derselben Ebene senkrecht errichtet worden, und damit auf den behandelten Lehrsatz.

Auf solche Weise wird aber nicht bloß der oben erwähnte Gewinn erzielt, daß der Schüler infolge der Herstellung eines verbindenden Fadens das Gelernte besser behält, viel wichtiger ist die bessere Anleitung zu wissenschaftlichem Denken, welche durch die genetische Methode geboten wird. Man hat derselben zwar vorgeworfen, daß sie aus der knotigen Schnur des Euklidschen Lehrgebäudes einen glatten, ununterbrochenen Faden mache, ohne zu bedenken, daß dieser endlose einfache Faden lediglich das Bild endloser Langeweile sei, und nicht das einer organisch gegliederten Wissenschaft. Dieser Vorwurf kann jedoch nur auf einer gänzlichen Verkennung des Wesens der genetischen Methode, vielleicht auf einer Verwechselung derselben mit einer bestimmten äußeren Form des **Vortrags**, beruhen, denn gerade die Lösung der Aufgabe, „die Gesetze ausfindig zu machen, welche in den Eigenschaften der Raum- (und Zahl-)gebilde zu Tage treten und diese Gesetze den Leitfaden abgeben zu lassen zur Gruppierung der Theoreme", das ist ja eben das Ziel der genetischen Methode. Gerade dies vermißt man an dem Euklidschen Lehrgebäude, und aus diesem Mangel des letzteren ist der Ruf nach einer genetischen Methode hervorgegangen.

Gewisse Äußerlichkeiten, die von Einzelnen verlangt und hier und da in Lehrbüchern angetroffen werden, sind für die genetische Methode an und für sich ganz gleichgiltig. Daß z. B. die Lehrsätze nicht ihrem Beweise vorangestellt werden, sondern als Ergebnisse ihrer Ableitung und Entwickelung dem letzteren nachfolgen sollen, ist mehr eine Forderung des analytischen, als des genetischen Verfahrens. Da aber die Analysis nur die Aufgabe hat, Lehrsatz und Beweis zu finden, und ihre Ergänzung, wie oben gezeigt, durch die Hinzufügung der synthetischen Fassung findet, so kann z. B. das Lehrbuch sich recht wohl auf die Zusammenstellung der einzelnen Lehren in synthetischer Form, als auf das Ergebnis des Unterrichts beschränken, ohne dadurch dem letzteren das analytische oder gar das genetische Verfahren zu verwehren. Es ist auch nicht nötig, daß der Zusammenhang und die Abhängigkeit der einzelnen Abschnitte und Sätze jedesmal im Buche mit breiten, ausführlichen Worten angegeben werde, sondern es genügt hier, daß sie thatsächlich vorhanden sind und sich im Unterricht zu erkennen geben.

Auch die Weglassung der Überschriften „Lehrsatz, Zusatz, Erklärung, Aufgabe", welche von einzelnen Seiten mit üblen Namen, wie alter Zopf, spanische Stiefeln u. dgl. belegt worden sind, macht nicht das Wesen der genetischen Methode aus. Die bestimmte Markierung und Gliederung des zu Lernenden mittels dieser Überschriften hat sich im Unterricht vielfach als zweckmäßig für klare Auffassung und gesicherten Fortschritt von Anfängern erwiesen, und aus diesem Zweckmäßigkeitsgrunde wird sie von der Mehrzahl der Lehrer bisher beibehalten. Es ist durchaus nicht, wie man der genetischen Methode auch vorgeworfen hat, eine Eigenheit derselben, die individuelle Bedeutung der Sätze zu verwischen, sondern die letztere soll im Gegenteil erst zur

rechten Geltung kommen. Seine volle Bedeutung erhält der Satz oder Begriff doch erst durch seine Beziehung zum Ganzen, durch die Art und Weise, in welcher er sich als einzelnes Glied dem Organismus einfügt.

Die genetische Methode soll sich aber nicht bloß in der Anordnung und Verbindung der einzelnen Abschnitte, der Verknüpfung der Lehrsätze und Aufgaben, sowie der Ableitung der Begriffe zeigen, sondern auch in der Art der Beweisführung im Einzelnen. Dadurch, daß sie die Raumgebilde nicht einseitig als fertig gegebene starre Formen in die Untersuchung einführt, sondern dieselben auch als werdende, veränderliche, in einander übergehende betrachtet, das Hilfsmittel der Bewegung zur Überführung der Formen in einander nicht verschmäht, und zu den Beziehungen des Maßes auch diejenigen der Lage gesellt, gewährt sie eine sicherere und klarere Einsicht in den gesetzmäßigen Zusammenhang und die gegenseitige Abhängigkeit der Gestalten.

Wie die Prinzipien der genetischen Methode bis in die Einzelheiten der Beweisführung einzugreifen haben und welcher Gewinn dadurch auch in dem äußerlichen Erfolge des Unterrichts erzielt werden kann, möge noch ein ganz einfaches Beispiel erläutern:

Die Gleichheit der einander gegenüberliegenden Winkel im Parallelogramm beweisen Kambly und viele andere durch die Kongruenz der beiden Dreiecke, welche mittels einer Diagonale entstehen. Muß man sich schon wundern, daß die Gleichheit der dritten Winkel zweier Dreiecke, welche in den beiden anderen Winkeln übereinstimmen, mittels eines Kongruenzsatzes, statt durch die Winkelsummen bewiesen, daß also die durchaus einflußlose Voraussetzung der Übereinstimmung der Dreiecke in einem Seitenpaar mit benutzt, und so indirekt als eine Bedingung jener Behauptung hingestellt wird, so erscheint das eingeschlagene Verfahren noch unzweckmäßiger gegenüber dem genetischen Beweise. Da nämlich das Wesen des Parallelogramms in dem Parallelismus der Seiten, also in der Beschaffenheit der Winkel liegt, so ergiebt sich die Gleichheit der gegenüberliegenden Winkel einfach und naturgemäß nur daraus, daß sie mit demselben dritten Winkel des Parallelogramms gleiche Summen geben. Daß jener erste Beweis von den Verfassern gewählt wurde, hat allerdings seinen Grund, allein derselbe ist ein sehr äußerlicher: man folgert aus derselben Kongruenz gleichzeitig die Gleichheit der Gegenseiten des Parallelogramms und gewinnt also gewissermaßen mit einem Schlage zwei Eigenschaften des letzteren. Aber rechtfertigt dieser (scheinbare) Gewinn an Kürze den logischen Mangel? Und wäre dies der Fall, so ist doch ein wirklicher Gewinn gar nicht erzielt, denn bei der Umkehrung des Satzes von den gegenüberliegenden Winkeln kommt man doch mit der Diagonale nicht zum Ziele und ist infolge dessen gezwungen, den Beweis rein mit Hilfe der Winkelbeziehungen zu führen. So hebt sich dann dieser letztere Beweis als eine Ausnahme künstlich von den übrigen desselben Abschnittes

ab, und die Gleichmäßigkeit der Behandlung geht verloren, während die individuelle Bedeutung des einzelnen Satzes keineswegs klar wird. Wie ganz anders gestaltet sich die Sache bei der genetischen Anordnung! Die Definition des Parallelogramms führt naturgemäß zuerst auf die Untersuchung der Eigenschaften seiner Winkel; dieselbe ist unabhängig von den Längen der Seiten, zu keinem Beweise wird eine Diagonale benutzt. Dann erst folgt die Frage nach den Beziehungen zwischen den Seitenlängen, und hierbei wird zu allen Beweisen der Gebrauch der Diagonale nötig. Wie leicht prägt sich dies dem Verständnis und dem Gedächtnis der Schüler ein, die nun nicht mehr nötig haben, sich für den einzelnen Satz die ihm vereinzelt zukommende Art der Beweisführung zu merken!

Durch Hinzufügung der beiden zuletzt besprochenen zu den früher beschriebenen Methoden ergeben sich nun im ganzen sechs mögliche Kombinationen, unter denen jedoch zwei durch besonderes Zusammenpassen ihrer Bestandteile hevorzuragen scheinen. Es sind dies die Kombinationen: dozierend-synthetisch-euklidisch und heuristisch-analytisch-genetisch. Die letztere erscheint als diejenige, auf deren thunlichste Herrschaft die neuere Methodik des mathematischen Schulunterrichts hinstrebt.

§ 14. Weitere Bemerkungen zu den vorstehenden allgemeinen Methoden.

Wenn als das Ergebnis der vorstehenden Erörterung sich die Regel ergeben hat: die Unterrichtsform sei heuristisch, die Behandlung des sachlichen Inhalts analytisch, der Aufbau des Systems genetisch, so kann damit keine unverbrüchlich bindende Vorschrift, sondern nur eine allgemeine Richtschnur gegeben sein, welche im regelrechten Verlaufe des Unterrichts thunlichst ins Auge zu fassen ist. Denn wir haben gesehen, daß auch die anderen Methoden gewisse Vorzüge besitzen, welche unter bestimmten Umständen an Wert gewinnen und es als berechtigt erscheinen lassen können, wenn an einzelnen Stellen, so zu sagen ausnahmsweise, von ihnen Gebrauch gemacht wird. Greifen wir ein Beispiel für derartige Fälle mitten aus der Praxis heraus: Der Lehrer hat das Unterrichtspensum einer ungeteilten Prima für die einzelnen Quartale oder Semester nach der durchschnittlichen Stundenzahl abgemessen und verteilt. Nun fällt in einem Jahre Ostern ausnahmsweise frühe, auch setzt der der Abgangsprüfung vorsitzende Schulrat vielleicht die betreffende Anstalt als die erste, welche er besuchen will, auf seinen Reiseplan und verkürzt dadurch die zu Gebote stehende Zeit noch mehr, denn nach dem Examen ist in der Regel von den Oberprimanern keine besonders angestrengte Teilnahme am Unterricht mehr zu erwarten. Vielleicht hat der Lehrer auch an irgend einer Stelle bei dem gegenwärtigen Schülerjahrgang unerwartete Schwierig-

keiten gefunden und ist dadurch aufgehalten worden, kurz seine Zeit ist ausnahmsweise beschränkt, und er will doch sein Pensum zu Ende bringen. In solchem Falle wird er den schon geübteren Schülern gegenüber hier und da etwas rascher dozieren und einzelne Abschnitte rein synthetisch durchnehmen dürfen, um den Zeitverlust wieder einzubringen. Dem Primaner wird es ja auch nicht gerade schaden, wenn ihm in seinen letzten Semestern zuweilen die Anspannung seiner Aufmerksamkeit für einen länger dauernden Vortrag zugemutet wird, welche er bald auf der Universität als Regel üben soll, ja es ist ihm zur Förderung der Willenskraft eine solche Zumutung, wenn sie von Erfolg begleitet ist, recht nützlich. Überhaupt muß von den Schülern, je weiter sie fortschreiten, auch immer mehr an geistiger Arbeitskraft verlangt werden, und schon bei dem Tertianer darf es nicht mehr erforderlich sein, daß ihm j e d e Einzelheit abgefragt werde, um seine Aufmerksamkeit zu erhalten. Was er selbst thun kann, das muß ihm auch zu eigener Arbeit überlassen werden, und das Fragen danach hat dann nur noch den Zweck, ihn zu dieser Arbeit zu bewegen und den Lehrer zu vergewissern, daß sie gethan ist.

Daß auch die Person des Lehrers bei der Wahl der Methode eine Rolle spielt, wird kaum bestritten werden. Wenn auch Aussprüche, wie der, daß „die Methode gleichgiltig und nur die Ziele bestimmt“ seien, oder daß „der Lehrer die Methode“ sei, kaum mehr als Phrasen sein dürften (man verzeihe das Wort), so ist doch sicher, daß nicht jedem das richtige Fragen und Entwickeln gleich gut gelingt, und mancher, der sich in eine spezielle Unterrichtsweise ganz hineingelebt hat, damit immerhin besseres erreicht, als wenn ihm ein seinem Wesen fremdes Verfahren aufgezwungen wird. Es ist auch wahr, daß ein guter Lehrer mit einer schlechten Methode bessere Erfolge erzielen kann, als ein schlechter mit einer guten Methode. Alles dies beseitigt aber nicht die Pflicht jedes Lehrers, nach dem Besten zu streben und eintretenden Falles auch das Gute dem als besser Erkannten zu opfern.

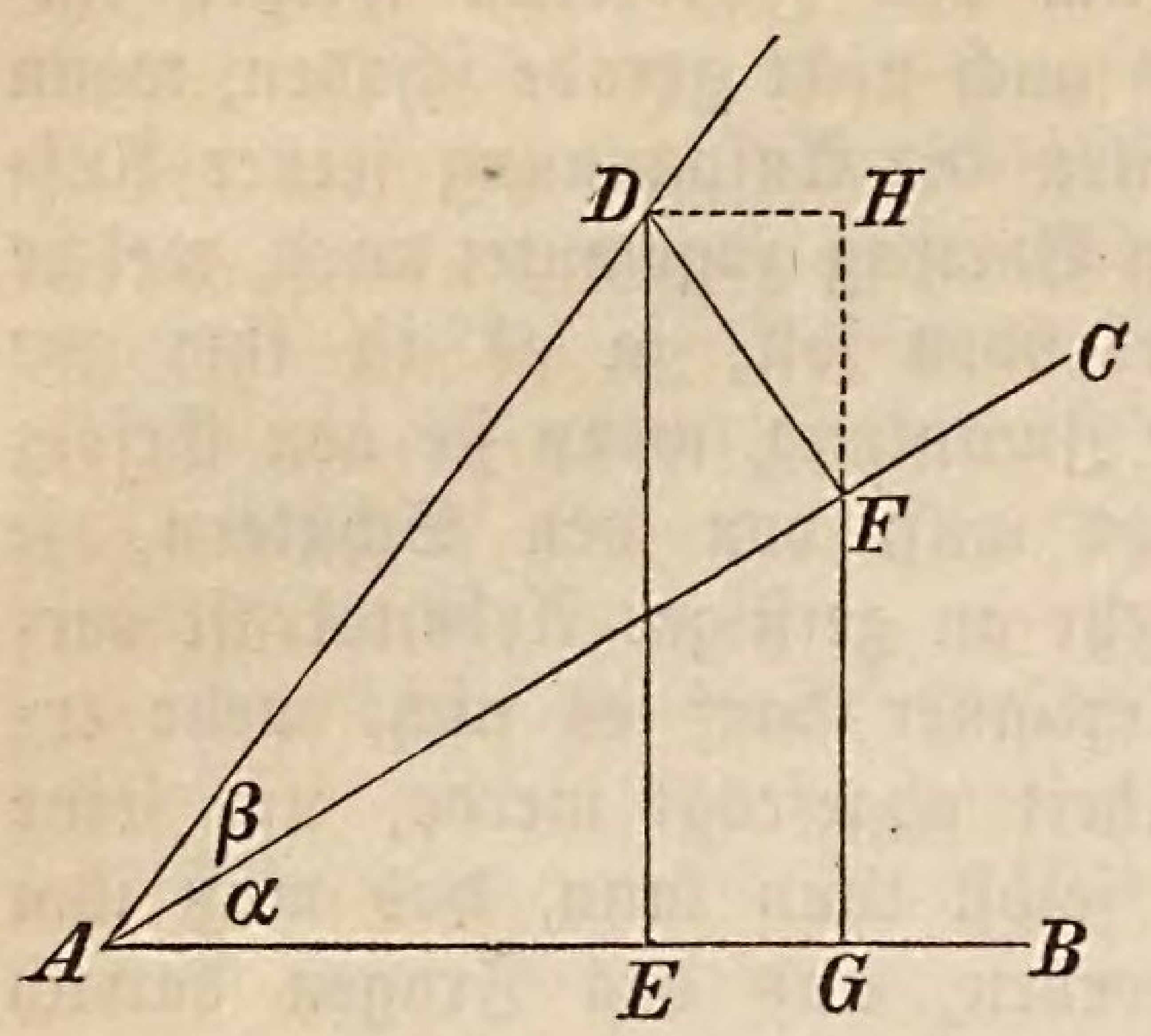
Man wird vielleicht zweifeln, ob das als Regel empfohlene Verfahren auch an allen Stellen des mathematischen Unterrichts ausführbar sei. Es sollen deshalb, um noch weiter zu zeigen, daß die verschiedensten Gegenstände desselben sich mehr oder minder den gestellten Forderungen anpassen lassen, im nachstehenden noch einige besondere Unterrichtsbeispiele ausgeführt werden. Wir wählen zunächst

eine trigonometrische Stunde in der Sekunda.

Es sei die Aufgabe gestellt, die Funktionen der Summe oder der Differenz zweier Winkel durch Funktionen der einzelnen Winkel auszudrücken.

Um die Summe zweier Winkel α, β in einer Figur darzustellen, ist es selbstverständlich am naheliegendsten, an einen Winkel $BAC = \alpha$ einen zweiten $CAD = \beta$ anzulegen. Soll nun $\sin(\alpha + \beta)$

dargestellt und zu diesem Zwecke der Winkel DAB in ein rechtwinkeliges Dreieck gebracht werden, so kann man von einem beliebigen Punkte D des Schenkels AD die Senkrechte DE auf AB fällen, man wird jedoch der Einfachheit halber die Länge der Hypotenuse AD gleich 1 wählen. Es ist dann



$$\sin(\alpha + \beta) = DE.$$

Um nun DE durch Funktionen der einzelnen Winkel α, β darzustellen, wird man auch diese in rechtwinkelige Dreiecke zu bringen suchen. Für β kann zu diesem Zweck die bequeme Hypotenuse $AD = 1$ beibehalten werden; man wird also die Senkrechte DF auf AC fällen. In geeignetem Anschluß hieran erhält man dann auch für α ein rechtwinkeliges Dreieck, wenn man FG senkrecht auf AB fällt. Um dann DE zu diesem Dreieck in Beziehung zu setzen, kann man DH parallel zu EG bis zum Durchschnittspunkte H mit der verlängerten GF ziehen; dann ist $DE = HG = FG + HF$. Es sind also die Strecken FG und HF durch Funktionen von α und β auszudrücken. FG liegt im Dreieck AFG, und zwar ist FG die dem Winkel α gegenüberliegende Kathete; man kann also FG mittels des Sinus von α ausdrücken und erhält $FG = AF \sin \alpha$. Die in diesem Ausdruck vorkommende Strecke AF ist im Dreieck AFD die dem Winkel β anliegende Kathete, und da die Hypotenuse $AD = 1$ ist, so ist $AF = \cos \beta$, also $FG = \sin \alpha \,.\, \cos \beta$.

Die zweite der auszudrückenden Strecken, HF, liegt in dem rechtwinkeligen Dreieck HDF; man muß also suchen, einen der spitzen Winkel dieses Dreiecks zu bestimmen. Man findet $\sphericalangle DFH = 90^0 - AFG$ (denn $\sphericalangle DFA = 90^0$), also $DFH = \alpha$, und es ergiebt sich nun $HF = DF \cos \alpha$. DF endlich liegt im Dreieck AFD, und es ist $DF = \sin \beta$, mithin $HF = \cos \alpha \,.\, \sin \beta$. Demnach erhält man

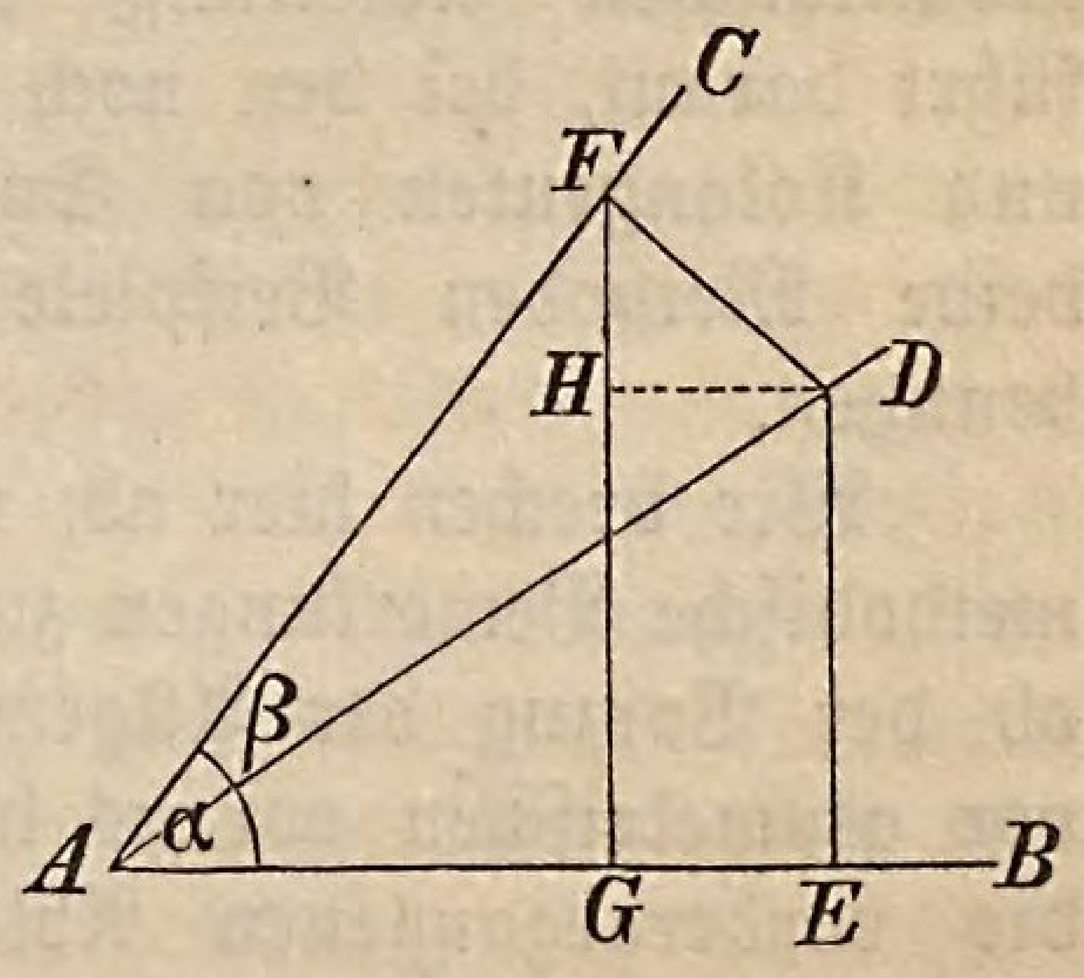
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Dieselbe Figur kann zur Entwickelung von $\cos(\alpha + \beta)$ dienen, und diese letztere wird jetzt von gut vorgebildeten Schülern fast ganz selbständig gefunden werden. Sie möge, da sie sachlich nichts Neues bietet, statt in zusammenhängender Darstellung, in der Form der etwa vom Lehrer zu stellenden Fragen gegeben werden und so als Beispiel dafür dienen, wie sich eine solche Entwickelung zweckmäßig im praktischen Unterricht gestaltet.

In welchem Dreieck muß $\cos(\alpha + \beta)$ aufgesucht werden? Welche

Strecke ist gleich $\cos(\alpha + \beta)$ zu setzen (da die Hypotenuse $AD = 1$ ist)? Kann man AE durch andere Strecken ausdrücken (als Summe oder Differenz zweier anderen Strecken)? In welchem Dreieck liegt nun AG, durch welchen Winkel kann also AG ausgedrückt werden, welche Seite ist AG in Beziehung auf diesen Winkel, und durch welche Funktion von α wird man also AG darstellen? Welches Verhältnis ist gleich $\cos\alpha$? Was erhält man also für AG? In welchem andern Dreieck liegt nun AF? Durch welchen Winkel ist also AF auszudrücken? Durch welche Funktion dieses Winkels? Was erhält man also für AF, was hiernach für AG? — Um EG auszudrücken, kann man sie zunächst durch eine gleich lange Strecke ersetzen, durch welche? In welchem Dreieck liegt DH? Durch welchen Winkel wird also DH gefunden? Wie liegt DH zu diesem Winkel? Welche Funktion desselben wird man also benutzen? Welchem Seitenverhältnis ist $\sin DFH$ gleich? Was ergiebt sich also für DH? Mittels welches Dreiecks ist nun weiterhin DF auszudrücken? Durch welchen Winkel? Durch welche Funktion desselben? Was erhält man für DF? Was also für DH? Was endlich für $\cos(\alpha + \beta)$? Vergleicht die gewonnene Formel mit der vorher für $\sin(\alpha + \beta)$ entwickelten! Worin bestehen die äußeren Unterschiede beider Resultate?

Die volle Ausführlichkeit dieser Fragen ist natürlich nur bei schwächeren Schülern notwendig. Geübtere werden einzelne Zwischenglieder der Entwickelung für sich finden, und man wird beispielsweise von ihnen, nachdem $DE = FG + HF$ aufgestellt ist, sogleich verlangen können, daß der Ausdruck für FG mittels eines der einzelnen Winkel angegeben werde. In der nun folgenden Entwickelung des Sinus und des Kosinus einer Differenz, welche fast wörtlich gleichlautend mit der vorstehenden gegeben werden kann, darf der Lehrer jetzt selbst von schwächeren Schülern verlangen, daß sie die Zwischenfragen: In welchem Dreieck liegt die auszudrückende Strecke, durch welchen Winkel ist sie also auszudrücken, welche Funktion desselben wird man also benutzen u. s. w., sich im Stillen selbst vorlegen und beantworten, sodaß nur der schließliche Ausdruck für die Einzelstrecke möglichst rasch angegeben wird. Gute Schüler geben in der Regel die gesamte Entwickelung nach dem Vorhergegangenen ganz selbständig, höchstens bedürfen sie einer kleinen Hilfe bei der Konstruktion der Figur. Daß jetzt der Winkel $CAD = \beta$ nicht an den Winkel $CAB = \alpha$ angelegt, sondern von ihm abgetragen wird, finden wohl alle, ebenso daß man wieder $AD = 1$, DE senkrecht auf AB, DF senkrecht auf AC und FG senkrecht zu AB ziehen muß. Dann wird es jedoch gut sein, wenn der Lehrer verhütet, daß etwa einer äußeren



Ähnlichkeit der Zeichnungen zuliebe die Parallele zu GE durch F statt durch D gezogen werde. Es ist dies zwar auch gestattet, aber die volle — wörtliche — Analogie der beiden Entwickelungen ginge verloren. Alles Übrige ergiebt sich von selbst.

Ehe man nun zur Entwickelung der Tangenten und Kotangenten übergeht, ist es zweckmäßig, darauf aufmerksam zu machen, daß bei den vorstehenden Ableitungen in den Figuren die stillschweigende Voraussetzung gemacht ist, daß α, β und $\alpha + \beta$ spitze Winkel seien. Es bleibt also noch zu untersuchen, ob die gewonnenen Formeln allgemein giltig sind. Dieser Nachweis gestaltet sich mittels der für die möglichen anderen Fälle in ganz entsprechender Weise wie vorher zu konstruierenden Figuren zu einer Wiederholung des Vorhergegangenen, denn die Ableitungen bleiben, mutatis mutandis, fast wörtlich dieselben. Man kann also sagen, daß die Beschränkung auf die besonderen Fälle nur in den jedesmaligen Figuren liege, die Entwickelungen der Formeln aber allgemein giltig seien. Bei der leicht erkennbaren Schwerfälligkeit und Weitläufigkeit, welche die Wiederholung desselben Verfahrens für alle in der Figur möglichen Fälle mit sich bringt, dürfte es genügen, im Unterricht nur einen oder den anderen der letzteren, und vielleicht auch diesen nur als Übungsstoff zu behandeln, und außerdem zu zeigen, daß die allgemeine Giltigkeit der nur für spitze Winkel bewiesenen Formeln auch mittels der Gleichungen $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$ u. s. w. nachgewiesen werden kann. Nur der eine Fall, in welchem α und β spitz sind, $\alpha + \beta$ aber ein (rechter oder) stumpfer Winkel ist, soll unbedingt noch an der Figur behandelt werden, da auf ihn die letztgenannte Beweisführung nicht paßt.

Der Mangel des Nachweises der allgemeinen Giltigkeit der mittels einer speziellen Figur abgeleiteten Lehrsätze und seine vorstehend angegebenen Folgen werden vermieden, wenn statt einer geometrischen Ableitung eine analytische angewendet wird. Dies führt darauf, bei den noch rückständigen Entwickelungen der Tangenten und Kotangenten von Summen und Differenzen, zugleich um für beide Methoden Beispiele zu haben, dieses letztere Verfahren zu benutzen.

Wir brechen hier ab, um an das Vorstehende noch einige weitere methodische Bemerkungen zu knüpfen. Man kann die Frage aufwerfen, ob der Vorzug der Allgemeinheit, welchen analytische Entwickelungen vor geometrischen voraus haben, es nicht ratsam erscheinen lasse, auch die vorhergegangenen Ableitungen der letzteren Art einzuschränken. In der That lassen sich, wenn $\sin(\alpha + \beta)$ und $\sin(\alpha - \beta)$ entwickelt sind, die zugehörigen Formeln für die Kosinus ohne besondere Mühe mittels $\cos x^2 = 1 - \sin x^2$ ableiten, so daß ihre allgemeine Giltigkeit nicht besonders bewiesen zu werden braucht, wenn diejenige der ersteren feststeht. Ganz unerlaubt aber ist es, aus den geometrisch abgeleiteten

Gleichungen für die Funktionen von $\alpha + \beta$ die entsprechenden für $\alpha - \beta$ dadurch abzuleiten, daß man in jenen $-\beta$ statt β setzt und die Formeln für die Funktionen negativer Winkel anwendet. Dies würde einfach eine Erschleichung sein, denn jene Ableitungen aus der Figur setzen ja ausdrücklich positive β voraus; daß sie auch für negative β gelten, müßte doch vorher bewiesen sein. Dieser Beweis ist eben die entsprechende Ableitung für $\alpha - \beta$ an der zweiten Figur; man kann sagen, die beiderseitigen Entwickelungen sind Entwickelungen eines und desselben Satzes für die beiden unterschiedenen Fälle, daß β positiv bezw. negativ ist. Dies ist auch der Grund, weshalb es möglich war, beide mit demselben Wortlaut auszuführen. Daß das Ergebnis der Untersuchung das ist, daß für beide Fälle entsprechende Resultate erhalten werden, und daß also das eine in das andere wechselweise übergehen muß, wenn man β durch $-\beta$ ersetzt, kann allerdings den Schülern erläutert werden.

Aber auch die vorher erwähnte Ableitung der Formeln für die Kosinus aus denen für die Sinus ist im Schulunterricht zu verwerfen. Zunächst entspricht sie nicht der Forderung, daß Gleichartiges auch möglichst gleichartig zu behandeln sei. Man könnte ja ebensogut zuerst die Formeln für die Kosinus auf geometrischem Wege, und dann aus ihnen diejenigen für die Sinus durch Rechnung ableiten. Welcher Grund spricht dafür, das eine eher zu thun, als das andere? Die Wahl beruht offenbar auf reiner Willkür, und solche ist unwissenschaftlich. Sodann liegt gerade in der gleichartigen Behandlung der zusammengehörigen Formeln eine Erleichterung der Arbeit für Lehrer und Schüler; die eine erscheint als Ergänzung der anderen, bietet eine Wiederholung des Verfahrens in anderer, nicht ermüdender Form und wird deshalb auch leicht behalten. Auch tritt die koordinierte Stellung der Formeln bei der letzteren Behandlung klarer hervor, und es erscheint nicht die eine in ihrer Stellung und Ableitung als abhängig von der anderen, während sie dies ihrer inneren Natur nach in keiner Weise ist.

Endlich besitzt die geometrische Entwickelung den Vorzug der Anschaulichkeit und damit der deutlicheren Einsicht in die innere Begründung, während die Ableitung auf dem Wege der Rechnung mittels eines Mechanismus erfolgt, der zwar das Resultat als unbezweifelt gewiß erscheinen läßt, aber z. B. die Gründe für die Analogien wie für die Unterschiede in dem Bau der schließlich gewonnenen Formeln nicht in gleicher Klarheit anschaulich zu Tage treten läßt. Daß wir nachher $\tan (\alpha + \beta)$ auf analytischem Wege ableiten, ist keine Inkonsequenz, denn die Tangenten (und Kotangenten) sind in der geometrischen Entwickelung den Sinus nicht in gleicher Weise koordiniert wie die Kosinus.

Statt des im Vorstehenden zur Entwickelung von $\sin (\alpha \pm \beta)$ und $\cos (\alpha \pm \beta)$ eingeschlagenen Verfahrens wenden manche ein anderes

an, welches auf dem Ptolemäischen Lehrsatze beruht und für kürzer und eleganter erklärt wird. Wir können das letztere zugeben, ohne deshalb die gleiche Folgerung für den Gebrauch im Unterricht zu ziehen. Man versuche einmal die Ableitungen mittels des Ptolemäers in analytischer und genetischer Weise zu behandeln, und man wird einsehen, daß dieselben für Schüler entschieden weniger natürlich sind, als das obige Verfahren. In welchem Zusammenhang steht der gebrauchte Lehrsatz zu der hier gestellten Aufgabe, wie kommt man anders als durch einen zufälligen glücklichen Einfall darauf, gerade ihn an dieser Stelle anzuwenden? Diese Fragen werden sich dem Schüler keineswegs so leicht beantworten, daß ihm nicht das von uns eingeschlagene andere Verfahren entschieden als dasjenige erscheinen wird, welches mehr den Eindruck macht, daß es durch zielbewußtes Denken als das nächstliegende und daher einfachere aufgefunden werden könne. Wir folgen also auch hier dem Grundsatz, daß diejenigen Beweise und Ableitungen, welche der gute Schüler selbst finden kann, oder welche ihm wenigstens den Eindruck machen, daß dies hätte geschehen können, stets denen vorzuziehen sind, welche mehr oder minder als Ergebnis einer Kunstleistung oder eines außergewöhnlichen Könnens erscheinen.

§ 15. Fortsetzung.

Als letztes Beispiel diene endlich aus

einer planimetrischen Lehrstunde in Sekunda oder Obertertia

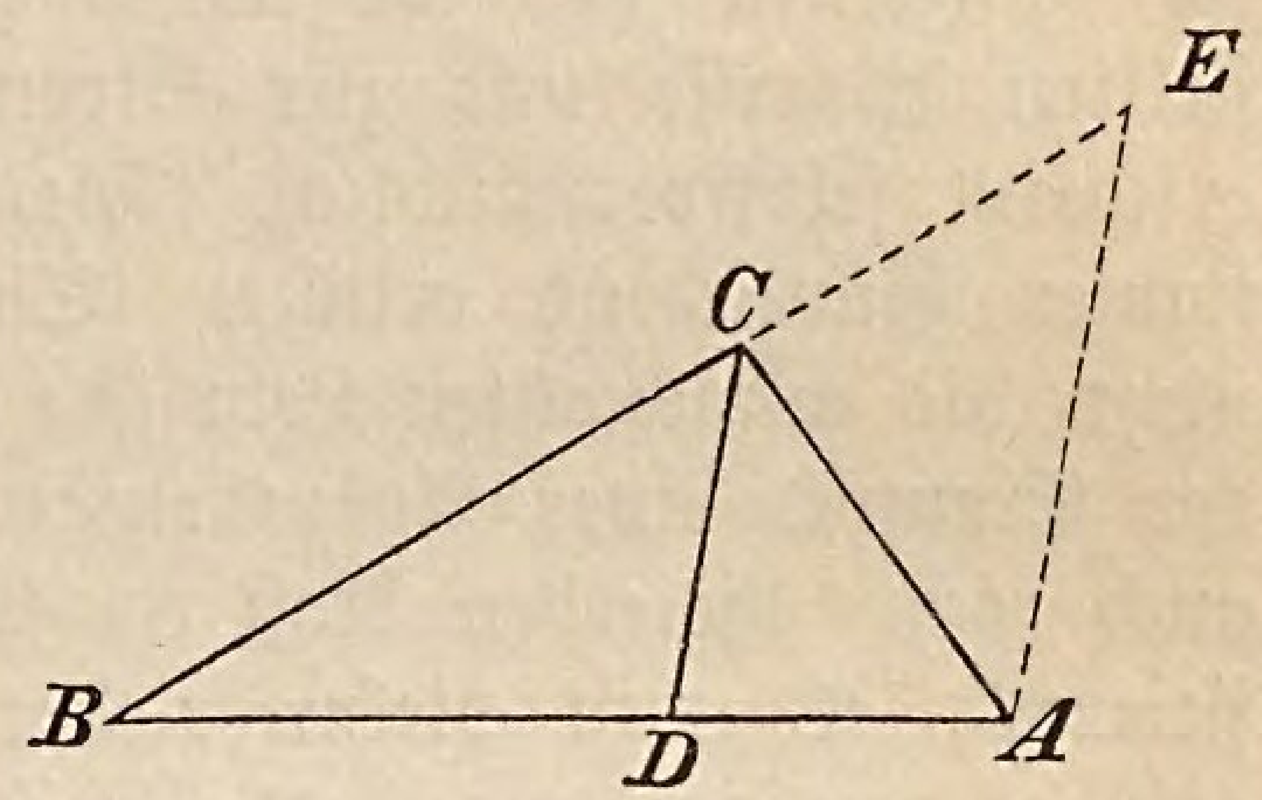
die Behandlung des Lehrsatzes: Die Halbierungslinie eines jeden Dreieckswinkels teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Die Entstehung dieses Lehrsatzes kann anknüpfen an den Satz: Die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks halbiert die Grundlinie, und seine Umkehrung. Räumlich kann allerdings dieser einen besonderen Fall des vorstehenden allgemeineren Lehrsatzes enthaltende frühere Satz aus bekannten Gründen nicht unmittelbar vorhergegangen sein. Bei seiner Durchnahme aber konnte bereits die Frage nach seiner Ergänzung in betreff der Halbierungslinien beliebiger Dreieckswinkel aufgeworfen werden. Die Beantwortung war damals noch nicht möglich, weil die dazu notwendigen Hilfsmittel noch nicht zu Gebote standen; dieselbe mußte einer späteren geeigneten Stelle vorbehalten bleiben, und an dieser letzteren wird also jetzt die Frage wieder aufgegriffen.

In einem unmittelbaren Anschluß an das zunächst Vorhergegangene steht die folgende Entwickelung: Nachdem die Verhältnisse untersucht worden sind, in welchen eine Dreieckstransversale, die einer Seite parallel ist, die anderen Seiten teilt, entsteht die Frage nach den Beziehungen zwischen den Seitenabschnitten, welche allgemeiner durch be-

liebig gezogene Transversalen des Dreiecks bestimmt werden. Der nächst einfache Fall ist derjenige, in welchem eine solche Transversale von einem Eckpunkte des Dreiecks ausgeht. Unter diesen Ecktransversalen sind wieder die einfachsten die Höhen, die Winkelhalbierenden und die Mittellinien. Die Untersuchung der Frage in betreff der Höhen hat auf die bekannten Sätze über Proportionen bei dem rechtwinkeligen Dreieck und als Folge derselben auf den (besonderen und allgemeinen) Pythagoreischen Lehrsatz und die verwandten Sätze geführt. Wir gehen nun zu der Untersuchung in betreff der Winkelhalbierenden über.

Es wird also vorausgesetzt, daß die Transversale CD im Dreieck ABC den Winkel ACB halbiere. Es liegt nahe, nach dem Werte des Verhältnisses der Abschnitte BD und DA zu fragen, und der oben erwähnte besondere Fall beim gleichschenkeligen Dreieck weist ausdrücklich auf diese Frage hin. Um für dieses Verhältnis mit Hilfe der vorausgegangenen Sätze eine Umformung zu gewinnen, wird man etwa AE parallel zu DC bis zum Durchschnittspunkte E mit der Verlängerung von BC ziehen, denn man erhält hierdurch



$$BD : DA = BC : CE.$$

BC ist die dem Abschnitt BD anliegende Dreiecksseite, CE dagegen der Länge nach bis jetzt noch in keine Beziehung zu gegebenen Stücken gebracht. Um eine solche Beziehung zu finden, muß die Thatsache benutzt werden, daß E mittels der zu DC parallelen Geraden AE bestimmt wurde, was darauf führt, daß Winkel $BCD = CEA$, Winkel $CAE = DCA$, also infolge der Voraussetzung Winkel $CEA = CAE$ und mithin $CE = CA$ ist. Daher erhält man

$$BD : DA = BC : CA,$$

d. h. den Lehrsatz, daß die Abschnitte der geteilten Seite sich zu einander wie die anliegenden Dreiecksseiten verhalten.

Um nun den Beweis dieses Lehrsatzes auch in synthetischer Form zu geben, kann man entweder, entsprechend der vorstehenden Analysis dieses Beweises, damit beginnen, daß man die Hilfslinie AE parallel zu DC zieht, oder zur Abwechselung auch umgekehrt verfahren, also zunächst die Verlängerung $CE = CA$ konstruieren, E mit A verbinden und dann entsprechend wie vorher beweisen, daß AE parallel zu DC sein muß. Beide Beweisarten haben nur eine das eigentliche Wesen nicht berührende, also gleichgiltige Verschiedenheit der Form, und deshalb kann den Schülern gestattet werden, wenn sie wollen, die eine statt der anderen zu wählen, vorausgesetzt, daß sie ohne die Ge-

fahr einer Verwirrung auf die mögliche Abänderung des Beweises aufmerksam gemacht werden dürfen, bezw. daß sie dieselbe aus sich selbst heraus finden.

§ 16. Besondere methodische Regeln mit Bezug auf die logische Verstandesbildung.

Den im vorigen besprochenen allgemeinen Methoden des mathematischen Schulunterrichts schließen wir im folgenden einige besondere Regeln an, durch deren Befolgung die Lösung der verschiedenen Aufgaben dieses Unterrichts ermöglicht oder erleichtert werden soll.

Daß man zum Zwecke der angestrebten logischen Verstandesbildung im Einzelnen für möglichste Klarheit und Bestimmtheit der aufgestellten Begriffe und für Strenge der Beweisführung zu sorgen hat, erscheint selbstverständlich. Gleichwohl sieht man diese Forderung nicht immer hinreichend erfüllt. So genügt es z. B. in der Arithmetik nicht, die aufgestellten Lehrsätze ohne Nachweis ihrer Richtigkeit mittels der Exempel einer Aufgabensammlung bloß einzuüben, und es genügt auch nicht, dieselben bloß an speziellen Beispielen erläuternd zu verificieren; es muß vielmehr der Beweis ihrer allgemeinen Giltigkeit geführt werden, und deshalb ist der Gebrauch eines Lehrbuches neben dem der Aufgabensammlung keineswegs entbehrlich. Wer beispielsweise folgert: da $4^2 . 4^3 = 4 . 4 \times 4 . 4 . 4 = 4^5$ und $a^3 . a^4 = aaa . aaaa = a^7$, so ist $a^m . a^n = a^{m+n}$, der fördert nicht die logische Verstandesbildung der Schüler, denn er gewöhnt sie an die falsche Folgerung: Was in einigen oder auch vielen Fällen sich bewahrheitet, das kann als in allen Fällen giltig angenommen werden. Es liegt hierbei eine Verwechselung des Beweises eines Satzes mit einer bloßen Erläuterung des letzteren vor, die zwar auch nicht fehlen, vielmehr dem Beweise vorausgehen soll, um den Inhalt des Satzes klar zu machen, die aber diesen Beweis nicht ersetzen kann.

Ebenso sind auch in der Geometrie alle sogenannten populären Beweise zu vermeiden, welche in der Berufung auf anschauliche Eigenschaften einer speziellen Figur gipfeln, oder auch nur Umschreibungen der Behauptung sind, wenn sie nicht gar sich geradezu im logischen Zirkel bewegen. Die ersteren wird man hier und da mit Nutzen zu weiterer Veranschaulichung und Erklärung gebrauchen können, wie z. B. das Zusammenfalten eines Papierblattes zu einer Ecke, um praktisch zu zeigen, das dasselbe nur möglich ist, wenn die Summe der ebenen Winkel weniger als vier Rechte beträgt; den strengen Beweis dürfen sie jedoch nie ersetzen.

Zwar sagen die schon mehrfach citierten trefflichen Instruktionen für den Unterricht der Gymnasien in Österreich: Der hohe Wert der Anschauung, der „ersten Quelle aller Evidenz", wird noch häufig nicht genug gewürdigt. Viele Wahrheiten der Geometrie können auf dem Wege der Anschauung erkannt werden, und es unterliegt keinem Zweifel, daß die meisten elementaren Sätze der Geometrie vor jedem Beweise

und doch mit der vollen Überzeugung von ihrer Wahrheit aufgefunden worden sind. Auch der geübte Mathematiker erkennt oft in seinen Untersuchungen die Evidenz geometrischer Beziehungen zuerst durch Anschauung und gelangt erst später zu ihrer begrifflichen Vermittlung in der üblichen Form. „Ist doch das anschauliche Wissen", wie Locke trefflich sagt, „unwiderstehlich; gleich dem hellen Sonnenlichte zwingt es zu seiner Erkenntnis, sowie die Seele sich darauf wendet; es läßt keinen Raum für Zaudern, Zweifeln und Untersuchen, die Seele ist sofort von dessen klarem Lichte erfüllt."

Diese Worte der „Instruktionen" beziehen sich jedoch auf einen vorbereitenden, nicht auf den eigentlich wissenschaftlichen Unterricht, und auch der enthusiastische Ausspruch Lockes zielt nach einer anderen Richtung als der hier vorliegenden. Die Aufgabe der wissenschaftlich mathematischen Unterweisung ist vielmehr gerade zu zeigen, wie die Anschauung, welche wohl Thatsachen zu erkennen und zu konstatieren vermag, aber in der Ergründung von Beziehungen und Gesetzen nur zu leicht versagt, durch die beweiskräftige Logik des Verstandes zu kontrolieren und zu ergänzen ist. Werden doch im Leben nicht selten die verkehrtesten Behauptungen, für welche kein Schimmer verstandesmäßiger Begründung zu finden ist, eben deshalb durch die Berufung auf die Evidenz unmittelbarer Anschauung zu stützen versucht, ist doch auch der Schüler so gern bereit, auf Grund der anschaulichen Eigenschaften einer nur einen Specialfall vertretenden Figur eine im allgemeinen falsche Behauptung als unmittelbar einleuchtend zu betrachten. Noch der Primaner versagt nach dieser Richtung in schwierigeren Fällen trotz der ihm bereits gewordenen geistigen Schulung und bedarf deshalb der weiteren logischen Erziehung. Man mache den Versuch, etwa mit folgendem Beispiel: Es seien zwei parallele Ebenen gezeichnet worden, welche von einer dritten geschnitten werden, und man habe den Beweis geführt, daß die korrespondierenden Flächenwinkel gleich sind. Dies ist auch einer von jenen Sätzen, von denen man meinen kann, daß sie keines Beweises bedürften, weil sie jedem aus unmittelbarer Anschauung einleuchten müßten. Man frage nun, ob die Umkehrung des Satzes in der Form: „Werden zwei Ebenen von einer dritten geschnitten, und sind zwei korrespondierende Flächenwinkel gleich, so sind jene Ebenen parallel" auf Grund der Anschauung für richtig zu halten sei; man wird dann finden, daß recht häufig diese Frage bejaht und also übersehen wird, daß auch noch die Voraussetzung paralleler Durchschnittslinien gemacht werden muß. Man denke beispielsweise auch an die Vergleichung von Rauminhalten verschiedener Körper auf Grund einer angeblichen Anschauung, bei der aber so oft das Verhältnis der dem Auge sich zunächst darbietenden Oberflächen mit dem Verhältnis der Volumina vertauscht wird.

Auch unzureichende Schlußweisen oder Konstruktionen, welche nur unter einer stillschweigend gemachten Voraussetzung gelten und trotzdem

für allgemein ausgegeben, oder später auf Fälle angewendet werden, die nicht in jener Voraussetzung liegen, kommen hier und da vor und müssen beseitigt werden. Hierher gehört die Anwendung arithmetischer Regeln, welche nur für bestimmte Kategorien von Zahlen bewiesen wurden, auf später auftretende Zahlbegriffe, z. B. auf irrationale oder imaginäre Zahlen, ohne daß ihre Giltigkeit auch für die neuen Zahlformen bewiesen wurde. In solchen Fällen sind die Beweise, welche vorher in der gegebenen Form ganz an ihrem Platze waren, an der geeigneten späteren Stelle zu vervollständigen.

In den Begriffsbestimmungen, den Definitionen, tritt häufig der Fehler auf, daß dieselben versteckte Behauptungen enthalten, deren Richtigkeit erst später nachgewiesen wird. Wer z. B. im Eingange der Stereometrie die Erklärung aufstellt: „Gerade Linien, welche zu allen durch ihren Fußpunkt gehenden Geraden einer Ebene senkrecht stehen, heißen senkrecht zu der Ebene", und erst dann den Satz folgen läßt: „Steht eine Gerade senkrecht zu zwei durch ihren Fußpunkt gehenden Geraden einer Ebene, so steht sie senkrecht zur Ebene", setzt in jener Erklärung die Möglichkeit solcher Linien voraus, bezw. behauptet dieselbe, während diese Möglichkeit erst in dem nachfolgenden Satze nachgewiesen wird. Ebenso ist es nicht streng, zu definieren: Eine Gerade, welche mit einem Kreise nur einen einzigen Punkt gemeinsam hat, heißt eine Tangente des Kreises, ehe die Möglichkeit einer solchen Geraden durch einen Lehrsatz nachgewiesen ist. Das Gleiche gilt von der Erklärung einander berührender Kreise, und in allen entsprechenden Fällen. Man kann kein Kind taufen, ehe es geboren ist. Wenn in den vorstehenden und in manchen anderen Beispielen häufig von dieser Forderung abgesehen wird, so hat dies seine Ursache offenbar wieder darin, daß die Existenz der betreffenden Gebilde anschaulich klar ist; darin liegt aber keineswegs eine hinreichende Rechtfertigung des Mangels an logischer Strenge. Was würde man z. B. dazu sagen, wenn jemand die Definitionen verschiedener Arten von Dreiecken nach der Beschaffenheit ihrer Winkel geben und dabei auch solche benennen wollte, welche drei stumpfe oder drei rechte Winkel u. dgl. m. haben, um dann erst nachher durch den betreffenden Lehrsatz zu finden, daß es solche Dreiecke nicht giebt? Auch hier muß dieser Lehrsatz jenen Erklärungen vorausgehen, denn nur aus ihm erwächst die Berechtigung zur Unterscheidung der betreffenden drei Arten der Dreiecke. Ebenso können die Begriffe rechtwinkeliger und schiefwinkeliger Parallelogramme nicht, wie es häufig geschehen ist, aufgestellt werden, ehe der Satz bewiesen ist: Ist ein Winkel eines Parallelogramms ein rechter, so sind auch alle andern rechte (oder ist einer schief, so sind auch alle anderen schief). Daß zuweilen die Wortfassung des der Definition oder der Einteilung vorauszuschickenden Satzes schwerfälliger wird, als wenn man den betreffenden kurzen Ausdruck infolge der vorher stattgefundenen Benennung gebraucht, kann den logischen Fehler nicht recht-

fertigen, und auch der Einwand darf nicht gelten, daß die Schüler an der betreffenden Stelle noch gar nicht reif seien, solche Feinheiten zu verstehen, und daß also nur eine unnütze Haarspalterei vorliege. Denn die logische Strenge muß auch da thunlichst eingehalten werden, wo es dem Lehrer noch nicht möglich ist, dieselbe den Schülern zum Bewußtsein und zum Verständnis zu bringen, weil auch auf diesem Gebiete die Gewohnheit eine Macht ist, und das Verständnis später schon nachkommen wird. Nur in dem Falle, daß eine noch gar nicht zum Verständnis zu bringende Strenge einer Entwickelung oder Begriffsbestimmung das Verständnis der letzteren selbst bei den noch zu schwachen Schülern schädigen oder gar verhindern könnte, darf und soll auf der betreffenden Altersstufe soweit als nötig von derselben abgegangen werden. Gewiß würde es beispielsweise verkehrt sein, in der Parallelentheorie bei Quartanern nicht einen möglichst einfachen Lehrsatz als durch die Anschauung hinreichend einleuchtenden Grundsatz zu behandeln und solchen Schülern irgendwie von Sätzen und Lehren der absoluten Geometrie zu reden, obgleich auch dies schon empfohlen und versucht worden ist.*) Ebenso müssen abstrakte Untersuchungen über die Begriffe des Raumes, der Ebene u. s. w. den dafür noch nicht empfänglichen Anfängern völlig fern bleiben, und es müssen diese Begriffe als thatsächlich, durch die Erfahrung gegebene angenommen und erläutert werden. In allen Fällen jedoch, wo eine noch nicht verständliche Strenge gar keinen Schaden bringt, raten wir, von derselben nicht abzugehen; da aber, wo die logische Strenge eingesehen oder auch nur gefühlt, ja wohl die mangelnde vielleicht gar von dem Lernenden selbst vermißt werden könnte, ist jeder Verstoß gegen dieselbe eine Unterrichtssünde. Diese Ansicht kann auch nicht erschüttert werden durch Anfeindungen solcher, welche spottend von „gestrengtester Strenge" und „Fanatikern des Beweisens" reden, ohne sich gleichwohl zu einer sachlich richtigen Widerlegung imstande zu zeigen.

Die logische Strenge wird jedoch nicht beeinträchtigt durch die Klarheit und anschauliche Verständlichkeit des Vortrags, vielmehr müssen beide stets Hand in Hand gehen, wenn Erfolge erzielt werden sollen. Man kann und darf dem Schüler nicht zumuthen, daß er den mathematischen Lehren zu ihrem Verständnis diejenige geistige Reife entgegenbringe, die er doch erst durch die Beschäftigung mit denselben erwerben soll. Daher ist eine unausgesetzte Erläuterung durch Beispiele und übende Anwendung auf Aufgaben nicht zu entbehren. Jene geschickt und passend zu geben, ist Sache des tüchtigen Lehrers und des denselben unterstützenden Lehrbuches; diese zu lösen, und zwar nach erfolgter hinreichender Vorbereitung und Anleitung durch den Unterricht, ist Sache der Schüler, welche dadurch auch zu selbstthätigem

*) Letzteres z. B. in Spitz, Die ersten Sätze vom Dreieck und den Parallelen, nach Bolyais Grundsätzen bearbeitet. Leipzig, Winter.

Arbeiten geführt werden sollen. Eine weitere Hilfe bieten richtig und gut ausgeführte, möglichst zahlreiche Figuren, welche im Buche, an der Wandtafel oder von der Hand der Schüler selbst in ihren Heften geliefert werden, und von denen später noch weiter die Rede sein soll. Selbst geeignete Modelle sind zuweilen nicht zu verschmähen. Wichtiger noch, als diese äußeren Hilfsmittel ist die innere Klarheit des Vortrags und die Anpassung desselben an die Verständnisfähigkeit der Schüler, vor allem die Vermeidung von Gedankensprüngen durch Weglassung von Zwischengliedern, die dem Lehrer als selbstverständlich scheinen, es aber für die Schüler keineswegs sind. Man darf die Geduld nicht verlieren, beispielsweise den Grundsatz von zwei einer dritten gleichen Größen bei seinen Anwendungen immer wieder im Einzelnen auszuführen, wenn man nicht eher sicher ist, daß die Schüler denselben aus sich heraus anzuwenden geübt sind, und dies kann bei Einzelnen recht lange dauern.

Die Aufgabe des Lehrers ist aber nicht bloß die Vermeidung von Fehlern und Mängeln in der logischen Behandlung des Stoffes, sondern auch die positive Hinwirkung auf Erkenntnis und Übung der Denkregeln, und zwar nicht sowohl dadurch, daß diese letzteren formal abgeleitet und aufgestellt, als dadurch, daß sie durch Beispiele und Anwendung an den Gegenständen des Unterrichts praktisch geübt werden.

Einen derartigen Fall zeigen uns z. B. die Umkehrungen gegebener Lehrsätze, von denen auch manche, welche nicht im Lehrbuche stehen, den Schülern zur Übung im Auffinden und Aussprechen derselben dienen können. Man denke z. B. an die zahlreichen Umkehrungen des Satzes, daß der zu einer Sehne senkrechte Durchmesser eines Kreises diese Sehne, sowie den zugehörigen Centriwinkel und die beiden zugehörigen Bogen halbiert. Es ist von hervorragendem Werte für die logische Ausbildung, wenn dem Schüler klar wird, daß ein Satz und seine Umkehrung sehr verschiedene Dinge sind, und namentlich daß aus der Richtigkeit des ersteren noch keineswegs die der letzteren unmittelbar folgt. Rührt doch ein ganz außerordentlich großer Teil aller Mißverständnisse und Streitigkeiten im Hader der Parteien wie der Einzelnen von solchen Verwechselungen einer wahren Behauptung mit einer falschen Umkehrung her. Man darf aber dem Anfänger keineswegs eine abstrakte Belehrung darüber geben wollen, unter welchen Bedingungen oder innerhalb welcher Grenzen eine Umkehrung richtig sein könne oder müsse, denn für eine solche ist er noch nicht reif, vielmehr soll er zu ihrem Verständnis gerade durch den angegebenen Weg der Anwendung an bestimmten Beispielen erst allmählich herangebildet werden. Wenn dann beispielsweise der schon etwas weiter fortgeschrittene Schüler bei den Sätzen: Parallelogramme mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind gleich, und später: Parallelogramme mit gleichen Produkten aus Grundlinie und Höhe sind gleich, den Grund erkennen kann, warum jener erste Satz nicht allgemein dahin umgekehrt werden dürfe, daß

gleiche Parallelogramme gleiche Grundlinien und Höhen hätten, so mag ihm derselbe immerhin auch an diesem *Beispiele* klar gemacht werden, jedoch ohne noch einen allgemeinen logischen Lehrsatz danach zu formulieren. Sieht der Schüler in diesem einzelnen Falle ein, daß jene Umkehrung falsch ist, weil die Voraussetzung der gleichen Grundlinien und Höhen nicht die *einzige* ist, welche die Behauptung der Gleichheit der Parallelogramme nach sich zieht, sieht er ein, daß jene Voraussetzung eben nur ein besonderer Fall der allgemeineren ist, daß sich die Grundlinien umgekehrt wie die Höhen verhalten, erkennt er ferner, daß es deshalb nicht gestattet ist, in jenem ersten Lehrsatze *beide* Voraussetzungen zugleich mit der Behauptung zu vertauschen, sondern daß *eine* derselben Voraussetzung bleiben muß, und nur die andere ihre Stelle mit der Behauptung tauschen darf, gelingt es ihm also, aus jenem Lehrsatze zwei wirklich richtige Umkehrungen zu bilden, so ist dieser Erfolg das Höchste, was an der betreffenden Stelle erreicht werden kann. Auch ohne vollständig klare Erkenntnis dessen, um was es sich bei dieser ganzen Erörterung handelt, und ohne den im allgemeinen vergeblichen Versuch, diese Erkenntnis durch besondere theoretische Auseinandersetzungen zu erzielen, wird der Schüler in späteren ähnlichen Specialfällen leichter als vorher imstande sein, das Richtige herauszufühlen und zu verstehen, und erst aus der Fülle der Beispiele und Anwendungen, nicht aus einem oder einigen besonderen Fällen, wird ihm in späterer Zeit auch die abstrakte Formulierung des Denkgesetzes klar werden können. Daß dies letztere schon auf der Schule, im mathematischen Unterricht geschehe, ist nicht notwendig; hier und da wird dies möglich sein, im allgemeinen aber genügt es, daß das Denkgesetz praktisch verstanden ist und ebenso angewendet wird. Damit hat der mathematische Unterricht seine Schuldigkeit gethan, das Übrige gehört dem „collegium logicum“.

Ein anderes Beispiel bieten uns die in der Mathematik oft vorkommenden Zusammenstellungen eines Satzes mit seinem Gegensatze und den beiderseitigen Umkehrungen. Es handelt sich also um je vier zusammengehörige Sätze von folgenden Formen: 1) Wenn A ist, ist B; 2) wenn A nicht ist, ist B nicht; 3) wenn B ist, ist A; 4) wenn B nicht ist, ist A nicht. In diesen Fällen kann schon die bloße Zusammenstellung der vier Sätze als eine logische Übung gelten, und es sollte deshalb möglichst vermieden werden, solche zusammengehörige Sätze in den Lehrbüchern an getrennten Stellen zu behandeln. Wollte man aber schon dem Anfänger zugleich etwa das begreiflich machen, daß von den im Viereck geordneten Sätzen:

a) Satz —	b) Gegensatz
c) Umkehrung des Satzes	d) Umkehrung des Gegensatzes

je zwei durch eine Diagonale verbundene einander gegenseitig bedingen,

daß und warum also ein Beweis des einen den des anderen überflüssig mache, so würde man mit solcher Belehrung weit über seinen Horizont hinausgehen. Auch hier wird erst die an einer Anzahl solcher Fälle gewonnene Übung zu einem allgemeineren Verständnis des Denkgesetzes führen können.

§ 17. Besondere methodische Regeln mit Bezug auf die Ausbildung des sprachlichen Ausdrucks.

Zur Übung der Korrektheit und bündigen Kürze des sprachlichen Ausdrucks bietet der mathematische Unterricht dem Lehrer auf Schritt und Tritt Gelegenheit und Veranlassung. Auch hierfür werden einige erläuternde Beispiele an Stelle einer allgemeinen Anleitung zu geben sein, da die letztere kaum ausführbar sein würde.

Einer der häufigsten Fehler gegen die Korrektheit der Sprache ist die Verwechselung des unbestimmten und des bestimmten Artikels. Sobald beispielsweise dargethan ist, daß zu einer bestimmten Geraden durch einen bestimmten Punkt nur eine einzige Parallele gezogen werden kann, darf nie mehr gesagt werden, „ich ziehe durch den Punkt eine Parallele zu der Geraden", sondern stets nur die Parallele. Ähnliches gilt für die Senkrechte, den umbeschriebenen Kreis, die Tangente u. dgl. m.*)

Ebenfalls sehr häufig ist bei Anfängern die Verwechselung einer Summe mit ihren Summanden, z. B. in Sätzen wie „die Winkel eines Dreiecks sind zwei rechte, zwei Seiten eines Dreiecks sind immer größer als die dritte, Nebenwinkel betragen zwei Rechte" u. dgl. m.

Pleonasmen finden sich oft in Ausdrücken, wie „einen Winkel in zwei gleiche Hälften teilen, eine Gerade ziehen, welche einen Kreis nur in einem Punkte berührt, ein gleichseitiger Rhombus, u. s. w.

Unnütze Breite und Weitläufigkeit der Darstellung zeigt sich in folgendem: „Ich setze das eine Zirkelbein auf den Punkt A und spanne den Zirkel bis zum Punkte B aus und schlage um A einen Kreisbogen", statt ich beschreibe um A mit dem Radius gleich AB den Kreis. Ferner: „Den Punkt, in welchem sich die beiden Kreisbogen schneiden, nenne ich C; dann verbinde ich denselben zuerst mit A, und darauf verbinde ich denselben Punkt mit B", statt den Durchschnittspunkt C der beiden Kreisbogen verbinde ich mit A und B. Oder „ich verbinde A mit B und verlängere AB über den Punkt B hinaus, bis die Verlängerung die Gerade CD in einem Punkte schneidet; diesen Punkt nenne ich E", statt ich ziehe durch A und B die Gerade, welche CD in E schneide.

Daß selbst die Lehrbücher sich oft nicht von groben Sprachfehlern frei halten, welche jedem Schüler in seinem Hefte angestrichen werden sollten, mag folgende Blütenlese aus verschiedenen neueren Werken zeigen:

*) Sturm in Hoffmanns Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht I, S. 273.

Der Quotient aus der dem Winkel gegenüberliegenden Kathete dividiert durch die Hypotenuse (also der Quotient wird dividiert).

In denselben seien a und b die Maßzahlen der Katheten BC und AC. (Beide von beiden? Doch a nur von BC, b von AC! In solchen Fällen muß mindestens das Wort „bezüglich" beigefügt werden.) Ähnlich ist: welcher die Schenkel dieses Winkels in den Punkten B und C durchschneidet.

An zwei Orten, deren geographische Breite bekannt ist. (Haben sie nur eine?)

Wie groß ist der Neigungswinkel zweier zusammenstoßender Seitenflächen eines regulären Tetraeders? (Giebt es etwa zwei nicht zusammenstoßende?)

Man ziehe eine Gerade im Punkte A.

Man errichte auf AB eine Senkrechte und verlängere sie, bis ... (Hatte dieselbe schon eine bestimmte Länge, so daß man verlangen kann, sie länger zu machen? Warum wurde sie nicht gleich von anfang an in der erforderlichen Länge gezogen?)

In einem ungleichseitigen Dreiecke liegt der größeren Seite der größere Winkel und der kleineren Seite der kleinere Winkel gegenüber. (Sind dies zwei Behauptungen oder eine, und gilt der Satz nicht auch für ungleiche Seiten gleichschenkeliger Dreiecke?)

Ein Winkel heißt ein stumpfer, wenn er größer ist als ein rechter. (Auch wenn er überstumpf oder ein gestreckter ist?)

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und zwei Winkeln übereinstimmen. (Müssen die Winkel nicht homologe sein?)

Zwei rechtwinkelige Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten übereinstimmen. (Auch wenn dabei die Hypotenuse des einen einer Kathete des anderen gleich ist?)

Was soll man gar zu einem Satze, wie der folgende, sagen, der gleichfalls einem Lehrbuche, und zwar einem, wie es scheint, in gewissen Kreisen viel gebrauchten entnommen ist? „Wächst der Winkel über 90^0, so wird er negativ, bis er zu 180^0 angewachsen, sein negatives Maximum $= -1$ erreicht hat. Also $\cos 180^0 = -1$."

Genug der Beispiele! Vielleicht erscheint die Rüge einzelner der in denselben verzeichneten Fehler manchem Leser pedantisch, allein man bedenke, daß der mathematische Unterricht dem Schüler als sprachliches Muster der Korrektheit und Präcision dienen soll, und daß derartige Sprachfehler unmerklich in Denkfehler übergehen, oder zu denselben verleiten. Wie leicht kann z. B. eine schlechte Gewöhnung an Aufmerksamkeit auf den sprachlichen Ausdruck dahin führen, den Logarithmus einer Summe mit der Summe der Logarithmen oder die Summe der Quadrate mit dem Quadrate der Summe (der Katheten) zu verwechseln, u. a. m.

Allgemeine Regeln für die Erkennung und Vermeidung solcher Fehler lassen sich, wie gesagt, nicht geben; man bedarf dazu des eigenen

Sprachgefühls und der Erfahrung. Auch sind manche sprachliche Fehler oder Nachlässigkeiten lokaler Natur. In der Einwirkung auf dieselben hat der mathematische vor dem Sprachunterricht das voraus, daß in ihm nicht so leicht wie in diesem der sich einer Unsicherheit bewußte Schüler die sich ihm darbietende Schwierigkeit durch Wahl anderer Redewendungen oder Gedankenverbindungen umgehen kann, sodaß die Unsicherheit ungeschwächt bestehen bleibt. Die Korrektur solcher Fehler ist jedoch die weniger einflußreiche Seite der mathematischen Schulung, wichtiger noch als sie ist die positive Einwirkung durch das Muster sprachlicher Präcision, welche das Lehrbuch, wie der Vortrag des Lehrers zu bieten, und nach welchem der Schüler seine eigenen, namentlich seine schriftlichen Arbeiten zu bilden hat.

Daß die Strenge des Ausdrucks nicht die Klarheit und Verständlichkeit des Unterrichts schädigen darf, ist freilich auch stets im Auge zu behalten; sie darf nicht zu abstrakter Kürze führen, welche z. B. im mündlichen Unterricht Wiederholungen von schon Gesagtem in anderer Form vermeidet, weil dieselben rein sachlich nicht notwendig sind, während sie zur Klarstellung, zur Erleichterung oder Ermöglichung des Verständnisses Nutzen bringen. Ebenso darf jene Strenge anderseits nicht zu sprachlichen Weitläufigkeiten führen, die, während sie die Genauigkeit der Angaben sichern sollen, diese durch ihre Länge unverständlich machen. Die richtige Mitte hierin zu treffen, ist nicht immer leicht, wie z. B. die verschiedenen Fassungen des Wortlautes von Regeln der Buchstabenrechnung in verschiedenen Lehrbüchern zeigen. So kann man z. B. der Ansicht sein, daß es genüge zu sagen: „Gleichnamige Brüche werden addiert, indem man ihre Zähler addiert", weil das Weggelassene, nämlich die Hinzufügung des gemeinschaftlichen Nenners als Nenner zur Summe der Zähler, selbstverständlich sei. Eine strengere Ansicht wird dagegen den angeführten Wortlaut der Regel sprachlich oder sachlich falsch finden, und etwa verlangen, daß gesagt werde: „Gleichnamige Brüche werden addiert, indem man ihre Zähler addiert und die Summe derselben durch den gemeinsamen Nenner dividiert", während die Anhänger der ersteren Ansicht dieser letzteren Fassung wieder den Vorwurf machen, daß sie für Anfänger zu lang sei, und die Hauptsache, nämlich die Addition der Zähler, nicht als solche hervorhebe, vielmehr mit dem übrigen gleichwertig erscheinen lasse.

Wie ungeschickt erscheint ferner die Regel eines dritten: „Die Summe gleichnamiger Brüche ist gleich dem Quotienten aus der Summe der Zähler als Dividendus und dem gemeinsamen Nenner als Divisor!" Gleichwohl wird man sich für eine dieser Formen oder eine ähnliche entscheiden und Sorge tragen müssen, daß durch hinreichende Erklärung und Anwendung die Gefahr des Mißverstehens oder des Nichtverstehens beseitigt werde. Solche Fälle sind aber im ganzen selten, und in der Regel ist mit korrekter Kürze des Ausdrucks auch gerade die Klarheit der Fassung verbunden.

Die Gelegenheit zu sprachlichen Übungen durch Selbstthätigkeit der Schüler bietet sich zunächst bei der Formulierung der Beweise. In philologischen und anderen Kreisen scheint sich noch hier und da die Meinung zu finden, daß nicht nur die Lehrsätze der Elementarmathematik, sondern auch die Beweise derselben wörtlich nach dem Lehrbuche auswendig gelernt werden müßten. Eine derartige Betreibung des mathematischen Unterrichts würde allerdings auf alle demselben eigenen Bildungsmomente fast völlig verzichten. Die Ansicht, daß jeder Beweis nur mit bestimmt gefaßten Worten mathematisch genau oder richtig gegeben werden könne, ist aber eine sehr irrige, vielmehr kann auch bei ganz gleichem Gedankengang die Wortfassung unbeschadet der Strenge eine sehr verschiedene sein. Der Unterricht sorgt zunächst nur dafür, daß jener Gedankengang dem Schüler klar werde; diese Wortfassung bei der Wiederholung zu finden, überläßt er dem letzteren, der allerdings das Vorbild dazu aus dem mündlichen Unterricht und eventuell aus dem Lehrbuche schöpft. Die betreffenden Versuche der Schüler werden selbstverständlich, besonders im Anfang, mit vielen Unvollkommenheiten und Fehlern behaftet sein. Indem nun diese Mängel im Unterricht durch die Mitschüler oder den Lehrer nachgewiesen und verbessert werden, tritt durch solche gemeinsame Arbeit jene Schulung des sprachlichen Ausdrucks ins Leben, welche allmählich zu größerer Sicherheit und Fertigkeit führt.

Bei den Lehrsätzen des Systems hat im Gegensatz hierzu die Aufstellung einer bestimmten Formulierung in Worten, welche möglichst konsequent beizubehalten ist, manche sachlichen Vorzüge, allein da, wo die früher (S. 37) empfohlene Analysis der Lehrsätze geübt wird, läßt sich auch die Festsetzung jener Formulierung zu einer sprachlichen Übung gestalten. Noch mehr ist dies der Fall bei denjenigen Lehrsätzen, welche nicht in das eigentliche System aufgenommen werden, sondern sich mehr gelegentlich bei näherer Betrachtung eines Raumgebildes ergeben oder als Übungssätze znm Auffinden von Beweisen benutzt werden. Alles dies geschieht nicht bloß im geometrischen Unterricht, sondern mindestens ebenso reichlich auch im arithmetischen. Wenn hier z. B. der Satz $a : \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c}{b}$ zuerst an einzelnen Zahlenbeispielen erläutert und von denselben abstrahiert ist, so entsteht die Frage, wie derselbe möglichst kurz und genau in Worten auszudrücken sei. Ist die Formulierung gelungen, so folgt dann noch diejenige der allgemeinen Begründung des Satzes.

Nicht minder ausgiebige Gelegenheit zu sprachlichen Übungen bieten die Aufgaben, sowohl die Konstruktionsaufgaben der Geometrie, als die Rechnungsaufgaben beider Disciplinen. Die Darlegung des Ganges der Auflösung, welche von verschiedenen Schülern auf verschiedenen Wegen, und selbst bei sachlicher Übereinstimmung in verschiedener Anordnung der einzelnen Operationen ausgeführt werden

kann, wird im fortschreitenden Unterricht eine sprachlich mehr und mehr selbständige Leistung. Ganz besonders tritt dies auch bei den eingekleideten Aufgaben der Algebra hervor, wo die Ableitung und Begründung des Ansatzes so häufig zeigt, wie das Vermögen sich präcis, korrekt und deutlich auszusprechen, mit dem Vermögen richtig zu denken Hand in Hand geht.

Es wird kaum nötig sein, die Aufführung solcher Gelegenheiten zur Übung der Schüler im selbständigen zusammenhängenden Ausdruck ihrer Gedanken noch durch Heranziehung anderer Gebiete zu vermehren oder die angeführten näher zu erörtern und etwa durch eine vollständige Behandlung spezieller Beispiele zu erläutern. Das Vorstehende wird als allgemeine Richtschnur für den angehenden Lehrer genügen, und verweisen wir in betreff einer näheren Ausführung auf den schon früher citierten Aufsatz von Oppel in der Zeitschrift für math. u. naturw. Unterricht, Jahrgang I, S. 394 und S. 443.

§ 18. Besondere methodische Regeln mit Bezug auf die Ausbildung des Raumsinns.

Die Ausbildung des Anschauungsvermögens kann im systematischen Unterricht nicht durch besondere Übung des Augenmaßes geschehen, etwa durch Zeichnung der Figuren nach bestimmten Maßangaben und Verhältnissen, oder durch die Ausführung praktischer Messungen. Dazu hat dieser Unterricht keine Zeit. Dagegen ist dieselbe besonders geeignet für einen vorbereitenden Kursus, eine geometrische Propädeutik, und sie wird daher bei der Besprechung der letzteren wieder zu erwähnen sein. Die weitere Ausbildung des Raumsinns geschieht im geometrischen Unterricht in der Hauptsache schon, ohne daß man nötig hat, besondere Mittel für dieselbe in Bewegung zu setzen, sie erfolgt durch die Art des Gegenstandes und der Beschäftigung mit demselben, die ja eben im Unterscheiden von Raumformen und dem Erkennen der Gesetze derselben besteht.

Immerhin aber wird es nützlich sein, und ist ja ohnedies durch die Forderung thunlichster Verständlichkeit des Unterrichts geboten, diese Ausbildung durch die Anwendung zahlreicher und passender Veranschaulichungsmittel zu befördern. Der vor kurzem in einer Zeitschrift von einem Lehrer der Mathematik gegebenen didaktischen Regel: „Der Lehrer gebrauche für seine Person so wenig als möglich Kreide und Schwamm" stellen wir deshalb die andere entgegen: Der Lehrer gebrauche im Unterricht, namentlich der unteren und mittleren Klassen, soviel als möglich die Wandtafel. Die zur ersten Einführung in einen Lehrsatz oder eine Aufgabe dienende Figur soll stets in thunlichster Größe und Anschaulichkeit an die Wandtafel gezeichnet werden, und zwar vom Lehrer selbst, nicht von den Schülern, welche ja nicht

im voraus wissen, worauf es ankommt, welche Gestalt und Lage also z. B. einem Dreieck am besten gegeben wird, um die Figur mit ihren charakteristischen Eigenschaften bei ihrem ersten Auftreten dem Anfänger möglichst anschaulich zu gestalten. Auch ist die technische Geschicklichkeit der Schüler zur Ausführung ausgedehnter Zeichnungen an der großen Wandtafel, welche sie wohl aus einiger Entfernung, aber nicht aus unmittelbarer Nähe zu überblicken vermögen, geringer als die des Lehrers und oft sogar ganz unzureichend.

Wenn aber, wie es auch vorkommt, die Durchnahme eines neuen Satzes an der von jedem einzelnen Schüler aufgeschlagenen Figur des Lehrbuchs erfolgt, so verzichtet der Lehrer auch auf den Wert, den das allmähliche Entstehen derselben vor den Augen der Schüler, also das Auftreten jeder Hilfslinie erst dann, wenn sie nötig wird, für das richtige Verständnis der Entwickelung hat, er verzichtet ferner auf den pädagogischen Vorteil, daß die Aufmerksamkeit der ganzen Klasse auf einen und denselben Gegenstand gerichtet und nicht durch die Beschäftigung mit dem nahe liegenden Buche abgelenkt wird, er verzichtet endlich auf den Vorteil, der in dem gleichzeitigen Hinweis aller Schüler durch Auge und Hand des Lehrers auf einen bestimmten, momentan besonders zu beachtenden Punkt, eine Linie u. dgl. liegt, und er begeht demnach einen ganz entschiedenen pädagogischen Fehler. Die Kurzsichtigkeit einzelner Schüler kann nicht als hinreichender Gegengrund gelten, denn man braucht ja nur den Kurzsichtigen den Gebrauch eines Augenglases für die Dauer der Betrachtung der Figur zu empfehlen und ihnen die zum Sehen günstigsten Subsellien anzuweisen. Die Verteilung der Plätze nach einer bestimmten Rangordnung und gar das Herauf- und Heruntersetzen innerhalb der Stunde sind in den mittleren und oberen Klassen durchaus entbehrlich, ja das letztere ist auch ohnedies im mathematischen Unterricht ganz zu unterlassen, da es Unruhe und Unterbrechungen verursacht und die Aufmerksamkeit stört.

Die vom Lehrer auf der Wandtafel zu entwerfenden Zeichnungen müssen gut ausgeführt werden, also auch stets die erforderliche Genauigkeit besitzen. Deshalb scheue derselbe, namentlich im Anfange, sich nicht, mit Lineal und Zirkel zu zeichnen, wenn er auch dazu etwas mehr Zeit gebraucht als zum Zeichnen aus freier Hand. Die Schüler werden durch die genauen Zeichnungen mehr angezogen und gefesselt, erkennen an ihnen besser die vorausgesetzten oder abzuleitenden Eigenschaften und nehmen sich dieselben zum Muster für ihre eigenen Arbeiten. Giebt der Lehrer ungenaue Freihandzeichnungen, so gewöhnt sich der Anfänger leicht daran, es auch seinerseits bei den Konstruktionen nicht genau zu nehmen, ja er versucht wohl gar ebenfalls ohne Zirkel und Lineal fertig zu werden. — Freilich darf die Anfertigung der Zeichnung nicht so ungeschickt langsam geschehen, daß der Lehrer während derselben längere Zeit der Klasse den Rücken zu-

kehrt und sie unterdessen unbeschäftigt läßt; eine gewisse Übung, rasch und sicher zu operieren, ist notwendig. Später können dann, falls der Lehrer, wie anzunehmen, die Geschicklichkeit besitzt, eine gerade Linie und einen Kreis mit leidlicher Richtigkeit aus freier Hand an die Wandtafel zu zeichnen, der Zeitersparnis wegen Einzelheiten der Figur oder selbst diese ganz ohne Instrumente gezeichnet werden, doch bleibt es, namentlich wenn diese Geschicklichkeit nicht hinreichend vorhanden ist, ratsam, auch dann die Hilfe von Lineal und Zirkel wenigstens in schwierigeren Fällen nicht zu verschmähen.

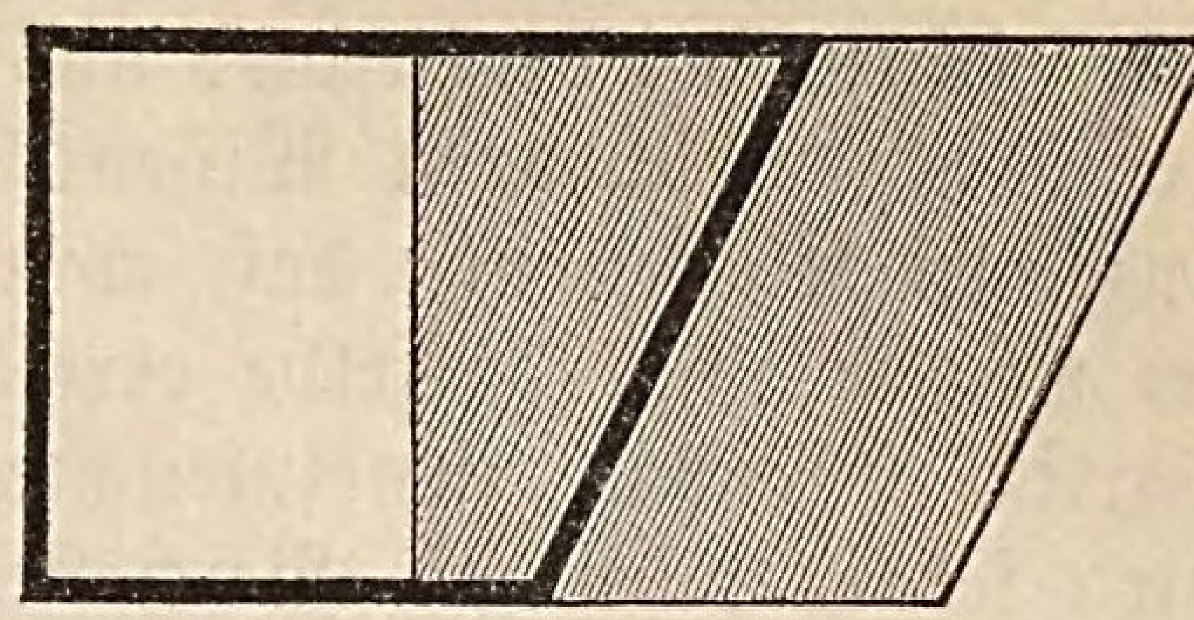
Anders als bei der ersten Durchnahme eines Satzes oder einer Aufgabe verhält es sich bei den Wiederholungen. Hier wird es vielfach angezeigt sein, die ganze Figur oder wenigstens einzelne Linien derselben durch die Schüler zeichnen zu lassen, teils um die Richtigkeit des Verständnisses zu prüfen oder seine Sicherheit zu erhöhen, teils um Leben und Wechsel in den Unterricht zu bringen und die Schüler durch ihre eigene Mitwirkung anzuregen. Nur ist auch hierbei das nötige Maß zu halten, damit nicht durch die Langsamkeit und das Ungeschick einzelner Schüler kostbare Zeit verdorben werde. Eine eigene Ausbildung im Entwerfen der Figuren erhalten die Schüler durch die Arbeit mit der Kreide an der Tafel doch kaum; eine solche ist durch die Ausführung von Konstruktionen in ihren Heften zu erzielen.

Diese letzteren Zeichnungen der Schüler, sei es in den zur Korrektur des Lehrers vorzulegenden, regelmäßig wiederkehrenden häuslichen oder Klassenarbeiten, oder in einem besonderen Zeichenhefte für spezielle Wiederholungsaufgaben von Stunde zu Stunde bilden ein weiteres Mittel für die Entwickelung des Raumsinnes und bieten daneben den Erwerb eines nützlichen Könnens, sowie eine Vorschule für das eigentliche geometrische Zeichnen. Aus allen diesen Gründen ist auf Sauberkeit und Genauigkeit der größte Wert zu legen, wodurch zugleich der allgemeinere Gewinn der Gewöhnung an Sorgfalt beim Arbeiten erzielt wird. Den ersten Anfängern wird man am besten gestatten, ihre Zeichnungen mit Bleistift zu machen, um ihnen die Schwierigkeiten des sauberen Arbeitens mit flüssigem Material noch zu ersparen; später sind die Figuren mit Tusche oder doch wenigstens mit Tinte zu zeichnen.

Da die Kontrole der Genauigkeit der Zeichnungen und die erste Gewöhnung an den richtigen Gebrauch der Zeicheninstrumente nicht unerhebliche Zeit und Sorgfalt des Lehrers erfordern, welche nicht gern dem theoretischen Unterricht entzogen werden, so wird man auch hier auf eine Vorschulung durch die oben erwähnte Propädeutik hingewiesen.

Als Hilfsmittel zur Erhöhung der Anschaulichkeit von Zeichnungen sowohl des Lehrers als der Schüler kann noch das Schattieren geeigneter Flächenstücke, sowie der Gebrauch verschiedenfarbiger Zeichen-

stifte erwähnt werden. So wird beispielsweise die Figur zu dem Satze von der Gleichheit der Parallelogramme bei der Übereinstimmung in den Grundlinien und den Höhen anschaulicher gemacht, wenn man die kongruenten Trapeze, von denen ein gemeinschaftliches Trapez weggenommen werden soll, wie in nebenstehender Zeichnung besonders hervorhebt. Verschiedene Kreidestifte oder Tinten empfehlen sich besonders bei sehr komplizierten Figuren zur Hervorhebung ihrer Gliederung, ihrer Entstehung durch Kombination selbständiger Bestandteile u. dgl. m. Doch ist in dieser Beziehung Maß zu halten, damit die Sache nicht in Spielerei oder Künstelei ausarte.



---

3. Kapitel.

Der Lehrplan und seine Hilfsmittel.

§ 19. Umfang und Begrenzung des Lehrstoffs.

Die Bestimmung des Umfangs des zu lehrenden Stoffes hängt in erster Reihe von der Beantwortung der Frage ab, welche Teile der Mathematik besonders geeignet seien, die Aufgaben des Unterrichts erfüllen zu helfen und dem Verständnis der Schüler nach dem Standpunkte ihrer geistigen Reife auf den verschiedenen Altersstufen zugänglich gemacht zu werden. In zweiter Reihe ist zu fragen, welche mathematischen Kenntnisse zu einer allgemeinen Bildung, sowie zur Vorbereitung auf spätere wissenschaftliche und Berufsstudien wünschenswert oder notwendig sind, endlich welche Zeit dem mathematischen Lehrfache in dem Organismus der betreffenden Schule ohne Schädigung von mehr berechtigten Ansprüchen anderer Unterrichtsfächer zugewiesen werden kann.

Die Entscheidung auf diese Fragen ist dem einzelnen Lehrer im allgemeinen entzogen; derselbe hat einfach die betreffenden Verfügungen der Centralbehörden zu befolgen. Auch wir müssen daher auf das Studium dieser allgemeinen Bestimmungen und ihrer Motive verweisen, deren Abdruck an dieser Stelle nicht unsere Aufgabe sein kann. Im einzelnen pflegt jedoch dem Lehrer ein gewisser Spielraum belassen zu werden, und dies ist notwendig, weil die erreichbare Grenze je nach den lokalen Verhältnissen etwas schwanken kann.

Denn abgesehen davon, daß selbstverständlich für jede der verschiedenen Kategorien von Schulen, wie humanistische und Realgym-

nasien, Realschulen u. s. w. auch ein verschiedenes Maß in der Betreibung der Mathematik gesetzt ist, so muß auch innerhalb derselben Kategorie zwischen solchen Anstalten unterschieden werden, bei denen alle Oberklassen in beiden Abteilungen getrennten Unterricht erhalten, und solchen, bei denen dies nicht der Fall ist. Es hängt ferner in betreff des erreichbaren Wissens sehr viel von der Schülerzahl in den einzelnen Klassen ab; daß man in überfüllten Klassen im allgemeinen bei weitem nicht dasselbe erreichen kann, wie in normal oder in selbst spärlich besetzten, ist einleuchtend. Ein recht bedeutender Unterschied wird ferner durch die Beschaffenheit der Schüler hervorgerufen; man findet in dieser Hinsicht von Ort zu Ort Verschiedenheiten, und sogar an derselben Schule einen Wechsel der durchschnittlichen Begabung bei verschiedenen Schülerjahrgängen. Auch sind in Städten, die humanistische und realistische Anstalten unabhängig neben einander besitzen, beide dadurch begünstigt, daß Schüler, deren Interesse und Begabung nach der einen Richtung geht, nicht gezwungen sind, eine die andere Richtung vertretende Schule zu besuchen und derselben mehr oder minder zur Last zu fallen.

Aus allen diesen Gründen kann die Erzielung gleicher Resultate nicht von allen Lehrern erwartet, und sie darf auch nicht bei Abiturientenprüfungen und Revisionen verlangt werden. Da jedoch eine möglichste Gleichmäßigkeit des Umfangs des zu behandelnden Lehrstoffes bei den verschiedenen Schulen derselben Kategorie aus manchen Gründen wünschenswert ist, so scheint es geboten, diesen Umfang nach einem mittleren Maßstab festzustellen und den begünstigteren Anstalten die Vertiefung des innerhalb dieses Umfangs zu erwerbenden Wissens, den schlechter gestellten aber eine Einschränkung durch Übergehen minderwichtiger Einzelteile und Ausführungen zu empfehlen.

Daß hiernach auf allen vollständigen Anstalten die vier Disciplinen: Arithmetik (Buchstabenrechnung und niedere Algebra), Planimetrie, Stereometrie und ebene Trigonometrie gelehrt werden müssen, bedarf bei allseitigem Zugeständnis keines Nachweises. Die humanistischen Gymnasien werden sich unter den gegenwärtigen Verhältnissen im allgemeinen mit diesen Fächern begnügen müssen, denn an ihnen ist der Mathematik zu wenig Zeit zugewiesen, um mit irgend welcher Sicherheit des Erfolgs und ohne Schädigung anderer, dann zu kurz behandelter Partien noch weitere Disciplinen heranziehen zu können.

Diese Ansicht in betreff der humanistischen Gymnasien ist jedoch keineswegs allgemein als richtig anerkannt worden; wir stellen deshalb im Nachstehenden zunächst einige Stimmen zusammen, welche sich in dieser Frage teils für, teils wider ausgesprochen haben.

Dieselbe ist namentlich in den mathematisch-naturwissenschaftlichen Sektionen der allgemeinen deutschen Philologenversammlungen wiederholt Gegenstand der Erörterung gewesen. In Hannover fand 1864

die Resolution allseitige Zustimmung, daß der Unterricht auf den Gymnasien die auf dem Begriff des Veränderlichen beruhenden Teile der Wissenschaft gänzlich auszuschließen habe, und daß die Geometrie mit Einschluß der ebenen Trigonometrie und der Stereometrie vorherrschend Gegenstand jenes Unterrichts sein müsse. Der größte Teil der Versammlung erklärte auch eine elementare Behandlung der Kegelschnitte für notwendig oder doch für wünschenswert. In ähnlicher Weise sprach sich die Versammlung zu Kiel 1869 aus, welche die These annahm: „Es empfiehlt sich, daß für den mathem. Unterricht auf Gymnasien eine obere und eine untere Grenze festgestellt werde. Die obere Grenze ist bestimmt durch das Gebiet der Elementarmathematik, als Minimum sind zu verlangen: Planimetrie, Stereometrie, ebene Trigonometrie, Arithmetik und Algebra bis zu den Gleichungen zweiten Grades." Dagegen verlangte Günther in einem Vortrage auf der Versammlung zu Wiesbaden 1877, daß die immer mehr sich vergrößernde Kluft zwischen den höheren Lehranstalten und der Universität durch eine Erweiterung des Pensums der ersteren beseitigt und somit „das unheilvolle Ereignis einer völligen Lösung des notwendigen inneren Zusammenhangs in dem Unterrichtswesen hintangehalten" werde. Deshalb solle der Unterricht mit den Fortschritten der lebendigen Wissenschaft in stetem Kontakt bleiben, der Lernende solle „Ausblicke" erhalten, wenigstens bei besseren Schülern oder Jahrgängen. Als geeignete Gebiete für solche Ausblicke wurden Äquipollenzenrechnung, Situationskalkül, Biquaternionen, Ausdehnungslehre, Resolventen, Determinanten, Lehre von den höheren Räumen oder Mannichfaltigkeiten angeführt. Auf derselben Versammlung lehnte die Sektion mit geringer Majorität die Aufnahme der Differential- und Integralrechnung in den Lehrplan selbst der Realschulen ab und nahm die These für Aufnahme der sphärischen Trigonometrie in den Gymnasialunterricht an.

Die letztere ist auch von vielen anderen Seiten nachdrücklich verlangt worden, und die dafür vorgebrachten Gründe, namentlich die Unmöglichkeit, ohne sphärische Trigonometrie den Schülern eine hinreichende Einsicht in die Grundlehren der astronomischen Geographie zu verschaffen, sind nicht ohne Berechtigung. Die neue Unterrichtsordnung gestattet demgemäß auch eine Anlehnung der Fundamente der sphärischen Trigonometrie an die Stereometrie. In der That wird es für den angegebenen Zweck, der nicht die praktische Ausführung astronomischer Rechnungen, sondern nur das Verständnis ihrer Möglichkeit im Auge hat, völlig hinreichen, wenn bei der Lehre von der körperlichen Ecke oder dem sphärischen Dreieck die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie, also insbesondere der Sinussatz und der Kosinussatz derselben abgeleitet werden und auf die Entwickelung der logarithmisch bequemeren Methoden mittels der Gaußischen Gleichungen, der Neperschen Analogien u. s. w. verzichtet wird. Jene Ableitung der Fundamental-

formeln erfordert an den bezeichneten Stellen nur geringen Zeitaufwand und kann sogar als eine Übungsaufgabe angesehen und behandelt werden.

Daß auch die Kegelschnitte in den Lehrplan der Gymnasialprima Aufnahme finden, ist ebenfalls von sehr vielen Seiten befürwortet worden; fast allgemein machte sich dabei die Ansicht geltend, daß die Behandlungsweise derselben nicht diejenige der analytischen Geometrie, sondern eine synthetische sein solle. Außer der schon erwähnten Philologenversammlung in Hannover beschäftigte sich u. a. auch die in Gera 1878 mit dieser Frage. Prof. Buchbinder erklärte sich hier in einem Vortrage dafür, daß die Kegelschnitte in synthetischer Weise nach Steiner auf dem Gymnasium behandelt würden, und zwar a) wegen ihrer Anwendungen in der Physik, b) weil sie vorzüglich geeignet seien, das geometrische Anschauungsvermögen der Schüler zu üben und die Hauptsätze der Geometrie an ihnen zu wiederholen, c) als Gegengewicht gegen die gerade in Prima überwiegende Arithmetik. Die Sektion nahm dann die These an: „Die math.-naturw. Sektion ist der Ansicht, daß die Lehre von den Kegelschnitten auch auf Gymnasien, und zwar in synthetischer Behandlung aufzunehmen sei, — eine Methode, welche auch auf den Realschulen mehr als bisher Berücksichtigung verdient." Doch haben sich auch Stimmen für die analytische Behandlung gefunden, welche den Schülern ein weites Feld eröffne und sie den Umfang der Mathematik ahnen lasse. Dagegen erklärte Kambly 1873 in seinem Referat für die Schlesische Direktorenkonferenz, „analytisch behandelt gehörten die Kegelschnitte einem ganz andern Gebiete an, als die Euklidsche Geometrie, in synthetischer Behandlung aber seien sie zu schwerfällig oder zu schwer". Der letzte Teil dieses Votums des bekannten Schulmathematikers hat durch den herausgeforderten Widerspruch dazu beigetragen, daß die Frage zum Gegenstand der Erörterung in Versammlungen oder Schriften gemacht wurde und durch dieselbe vielfach eine entgegengesetzte Beantwortung erhielt. Eine Anzahl von Lehrbüchern hat außerdem durch die Aufnahme eines betreffenden Abschnittes dem Gedanken der Einführung der Kegelschnitte Ausdruck verliehen, ebenso eine Reihe besonderer Schriften, deren Titel zum Teil später an der betreffenden Stelle des spezielleren Teils dieses Buches genannt werden sollen.

Die Aufnahme der Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung in den Gymnasialunterricht hat zwar nur vereinzelte, aber zum Teil nicht ungewichtige Stimmen für sich gewonnen. Aus praktischen Gründen, nämlich als unentbehrliche Vorbereitung für Universitätsstudien, wurde sie von hervorragenden Medicinern gewünscht, so von E. du Bois-Reymond („Culturgeschichte und Naturwissenschaft" in der Deutschen Rundschau VI, 2). Von Schulmännern im engeren Sinne hat sich Gallenkamp in der Berliner Oktoberkonferenz (1873) dafür ausgesprochen: „Nur dadurch könne der Gymnasialabiturient

eine Vorstellung von der großen Kulturarbeit auf dem Gebiete der Naturwissenschaft erhalten, nur so könne die Erweiterung einer immer bedenklicher werdenden Kluft zwischen den Gebildeten in der Nation vermieden werden; auch sei das wissenschaftliche Studium der Medicin ohne die Kenntnis dieser mathematischen Disciplinen nicht möglich." (Protokolle der Oktoberkonferenz, S. 81.) Derselbe, auch durch seine mathematischen Lehrbücher bekannte Leiter einer Berliner höheren Lehranstalt hat dann auch einen speziellen Lehrplan zur Befürwortung seiner Ansicht entworfen. (Zeitschrift f. d. Gymnasialwesen 1877, S. 1.) Dieselbe fand jedoch schon innerhalb der Konferenz Widerspruch von seiten des Geh. Rats Bonitz, welcher der Ansicht war, daß die beschränkte Zeit ein wirkliches Verständnis und ein Einleben in diese Gebiete nicht ermöglichen werde. Auch die preußischen Direktorenkonferenzen haben sich in dieser Frage meist ablehnend ausgesprochen; zum Teil, wie z. B. in der Provinz Preußen, verlangten dieselben die Ausschließung der Infinitesimalrechnung sogar aus dem Lehrplan der Realgymnasien, während die elsaß-lothringische Konferenz sich in betreff der letzteren Anstalten in entgegengesetztem Sinne aussprach. Das ebenfalls ablehnende Votum der Wiesbadener Philologenversammlung ist bereits oben mitgeteilt worden.

Eine ähnliche Divergenz der Ansichten ist in betreff der Determinanten hervorgetreten, doch scheint die Mehrzahl der heutigen Lehrer die Einführung derselben abzulehnen, weil ihr geringer Bildungswert die auf sie verwendete Zeit nicht lohne und auch die praktische Anwendbarkeit innerhalb des Schulunterrichts nicht bedeutend genug sei. Ausführliche Erörterungen für und wider findet man u. a. in der Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht.

Auch innerhalb der zugelassenen Gebiete können die Ansichten über die Ausdehnung, in welcher dieselben zu betreiben sind, erheblich auseinandergehen. So fragt es sich z. B., wie weit die Algebra betrieben werden, ob also die Gleichungen dritten oder höheren Grades zur Behandlung kommen sollen. Ebenso läßt sich die Grenze in der Lehre von den Reihen, in der etwaigen Heranziehung von Teilen der neueren Geometrie und in anderen Fällen sehr verschieden ziehen und auch das Urteil über die Notwendigkeit oder Nützlichkeit einzelner Abschnitte, wie der Lehre von den Kettenbrüchen, der Kombinatorik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung kann sehr ungleich ausfallen.

Die Entscheidung auf alle diese Fragen wird in der Praxis wesentlich bedingt durch die dem Unterricht thatsächlich zu Gebote gestellte Zeit. Da als oberster Grundsatz für die Auswertung derselben festgehalten werden muß, daß man zu neuen Gebieten nicht fortschreiten dürfe, ehe die alten in befriedigender Weise durchgearbeitet seien, so wird den meisten gewünschten Erweiterungen dadurch ein Ziel gesteckt werden, daß der Abbruch des Unterrichts nach vollendeter Dauer des Kursus jedes Weitergehen einfach unmöglich macht. Die-

jenigen, welche die Aufgabe des mathematischen Schulunterrichts durch die Aufnahme umfassender Gebiete erweitern wollen, stellen daher auch meist die Forderung einer größeren Stundenzahl als bisher. Solange dieselbe keine Aussicht auf Bewilligung hat, ist auch die praktische Ausführung jener Erweiterungen ausgeschlossen. Dies wird namentlich die Differential- und Integralrechnung treffen, welche, abgesehen von ihren Ansprüchen an das Verständnis, eine nicht geringe Zeit erfordert, wenn sie nicht mehr oder minder oberflächlich und mechanisch betrieben werden soll.

Für andere der angeführten Erweiterungen suchen die Vertreter derselben die Zeit durch Weglassung von bisher behandelten Abschnitten zu gewinnen, die sie für minder notwendig oder geistbildend halten, wie z. B. der Kombinatorik und der Kettenbrüche. Auf diesem Wege lassen sich allerdings einzelne Abänderungen des Lehrplans erzielen; eine Einigung über die Zweckmäßigkeit und Ausdehnung derselben ist mit der Zeit zu erstreben. Nur das muß unter allen Umständen festgehalten werden, daß die Einführung neuer Gebiete nicht auf Kosten der Gründlichkeit in der Behandlung der vorhergehenden fundamentalen Disciplinen, etwa durch Beschränkung der zur Erläuterung und Befestigung derselben notwendigen Übungen oder durch eine flüchtige Behandlung ohne hinreichende Vertiefung in den Gegenstand erfolge. Auch dürfen durch die Aufnahme von Neuem in das Pensum der Prima nicht solche Abschnitte des Lehrstoffs in vorhergehende Klassen herabgeschoben werden, für welche die Schüler der letzteren nach ihrem geistigen Standpunkte noch nicht genügend befähigt sind.

Als Resultat der Untersuchung über die Ausdehnung des mathematischen Lehrstoffs auf Gymnasien wird vielleicht folgendes anzuerkennen sein: Von allen Anstalten ist unbedingt die Absolvierung eines bestimmten Minimums zu verlangen. Als solches kann etwa der in den Kambly'schen Lehrbüchern enthaltene Stoff angesehen werden. Wo günstigere Verhältnisse ein Mehr ermöglichen, wird einerseits eine größere Vertiefung jenes minimalen Wissens und Könnens zu erstreben, andererseits eine Ausdehnung des Pensums durch Heranziehung der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung, einzelner grundlegender Abschnitte der neueren Geometrie oder anderer die Hilfsmittel der Elementarmathematik nicht übersteigender Partien zu gestatten sein.

Realistische Anstalten werden, je nach ihrer Stundenzahl und entsprechend den allgemeinen Vorschriften, über dieses Ziel des Gymnasiums hinausgehen. Die Behandlung der Kegelschnitte nicht blos nach synthetischer, sondern auch nach analytischer Methode, also die Anfangsgründe der neueren und die der analytischen Geometrie, ferner im Anschluß an die letztere, sowie den stereometrischen und den Zeichenunterricht, die Elemente der deskriptiven Geometrie, in der Algebra die Gleichungen dritten Grades, ferner die arithmetischen Reihen höherer Ordnungen, die Kennzeichen der Konvergenz der Reihen, die Exponen-

tialreihe, die logarithmischen und goniometrischen Reihen, endlich eine eingehendere Behandlung der sphärischen Trigonometrie, das dürften etwa diejenigen Gebiete sein, mit welchen jene Anstalten über das Pensum des Gymnasiums hinausgehen können. Dieselben reichen mehr als hin, die größere Stundenzahl der Realschulen auszufüllen; für die Infinitesimalrechnung wird auch an diesen im allgemeinen kein Platz bleiben.

Die weitergehenden Bestrebungen, den mathematischen Lehrplan der höheren Schulen zu erweitern, entspringen eingestandenermaßen zum Teil rein wissenschaftlichen Rücksichten, zum Teil dem Wunsche ihrer Anwendung zur Erlangung anderweiten Wissens und Könnens. Dem gegenüber wird stets daran zu erinnern sein, daß die Hauptaufgabe unseres Unterrichts an jenen Anstalten nicht nach diesen Seiten liegt. Wenn eine Kluft zwischen dem Gymnasium und der Universität einzutreten beginnt, so hat nicht bloß das erstere, sondern auch die Hochschule die Pflicht, an der Herstellung der verbindenden Brücke zu arbeiten. Die letztere darf bei ihren Anforderungen nicht vergessen, daß die höhere Schule nicht bloß zukünftige wissenschaftliche Mathematiker unter ihren Schülern zählt, sondern eine Mehrzahl von solchen Lernenden, denen weder dasjenige Interesse noch die Begabung für weitergehende mathematische Disciplinen innewohnt, welche der Hochschullehrer von seinen Hörern erwarten muß. Sie darf auch nicht vergessen, daß ein solides wissenschaftliches Gebäude nicht durch Verstärkung der mittleren und oberen Partien auf Kosten der Fundamente errichtet werden kann. Wenn die fortschreitende Wissenschaft immer höhere und höhere Forderungen an ihre Jünger stellt, so darf sie die Erreichung derselben nicht dadurch erstreben, daß sie einen Teil ihrer Arbeitslast auf andere Schultern wälzt, welche bereits hinreichend zu tragen haben, sie muß vielmehr im wesentlichen selbst dafür aufkommen und mit dem vermehrten Wissensumfang, welchen sie verlangt und darbietet, auch eine Verlängerung der Studienzeit oder aber eine Teilung der Arbeit verlangen, wie sie auch auf anderen Gebieten durch die wachsende Fülle des Stoffes notwendig geworden ist. Der Fortschritt der Wissenschaften führt in erklärlicher Weise die Vertreter derselben innerhalb der höheren Schulen auf allen Gebieten zu dem Wunsche, auch die Grenzen ihrer Unterrichtsfächer entsprechend zu erweitern. Die Schule aber, welche von feststehenden Anfängen ausgeht, die sie nicht hinaufschrauben kann, und die zugleich eine feststehende Arbeitszeit hat, kann nicht mehr leisten, als möglich ist; eine Erhöhung der Aufgaben auf dem einen Gebiete muß daher mit einer entsprechenden Entlastung auf einem anderen verbunden sein, und wenn diese nicht zu erreichen ist, so muß sie die Arbeit nach oben, nicht nach unten vermehren. Darum stimmen wir — ohne deshalb berechtigte Fortschritte ablehnen zu wollen — dem Ausspruche Holzmüllers (Zeitschr. f. math. u. naturw. Unt. XVI, 7) zu: „Bei jeder Anstalt liegt eine

große Gefahr in dem Überschreiten der Lehrziele, in dem Hinaufklettern zu höheren Stufen".

§ 20. Die Verteilung des Lehrstoffs.

Auch für die Verteilung des Lehrstoffs auf die einzelnen Klassen und Semester lassen sich keine strengen und allgemein bindenden Vorschriften geben, da auch sie von den Einrichtungen, dem Schülermaterial der einzelnen Schule und anderen wechselnden Umständen abhängt. Dieselbe ist für jede Anstalt durch einen ausgeführten Lehrplan zu regeln; wenigstens für alle Schulen, an denen nicht ein einziger Fachlehrer den gesamten mathematischen Unterricht in Händen hält, ist ein solcher notwendig, damit die verschiedenen Mathematiker sich gegenseitig in richtiger Weise unterstützen und jeder weiß, was sein Nachfolger von ihm verlangen kann und darf. Anfänger im Lehramt werden in der Regel nicht in die Lage kommen, einen solchen Lehrplan ausarbeiten zu müssen; sie werden einen solchen vorfinden, dem sie sich anzubequemen haben. Ein derartiger Lehrplan muß jedoch von Zeit zu Zeit revidiert werden, damit derselbe etwaigen Veränderungen der lokalen Verhältnisse, sowie den Fortschritten der Methodik gegenüber nicht veralte. Da diese Revisionen in Fachkonferenzen vorzunehmen sind, so erhält auch der Anfänger einen gewissen Einfluß auf den Lehrplan und muß in dieser Beziehung etwas orientiert sein.

Die wichtigsten Fragen, welche hierbei auftreten können, sind folgende: 1) Soll dem wissenschaftlichen geometrischen Unterricht ein propädeutischer vorausgehen und eventuell, wie ist derselbe zu behandeln, und in welcher Klasse, oder welchen Klassen ist er zu erteilen? 2) In welcher Klasse hat hiernach der wissenschaftliche geometrische Unterricht zu beginnen? 3) Da bei der Arithmetik die Frage wegen eines vorbereitenden Kursus dadurch erledigt wird, daß der Rechenunterricht der unteren Klassen denselben zu bieten hat, so ist weiter zu fragen, in welcher Weise der letztere als Propädeutik der Arithmetik zu behandeln ist. Diese Frage ist um so wichtiger, als das Rechnen häufig in den Händen eines Elementarlehrers liegt, dem die Forderungen des späteren Unterrichts an dasselbe möglichst zu präcisieren sind. 4) Sollen in den Klassen, welche Arithmetik und Geometrie zugleich auf dem Lehrplan haben, beide Disciplinen gleichzeitig neben einander, oder etwa abwechselnd, bezw. nach einander gelehrt werden, und mit welcher Verteilung der Stunden? 5) Bis zu welcher Stelle (Paragraphen des eingeführten Lehrbuches) soll das Pensum jeder einzelnen Klasse reichen, dessen Beherrschung von dem Lehrer der folgenden Klasse bei den versetzten Schülern vorausgesetzt werden muß? 6) Ist die Trigonometrie vor oder nach der Stereometrie zu lehren? 7) Welche schriftlichen Klassenarbeiten sind anzufertigen, und in welchen Terminen?

Die nähere Besprechung der meisten dieser Fragen, soweit eine

solche ohne die Berücksichtigung der lokalen Verhältnisse thunlich ist, soll im folgenden bei den einzelnen Unterrichtsgegenständen ihren Platz finden. An dieser Stelle kann nur die Frage 5) durch Vorführung einiger Lehrpläne erörtert werden.

Erstes Beispiel: Lehrplan eines Gymnasiums mit vollständig getrennten Klassen.

Sexta: Rechnen, wöchentlich 4 Stunden: Die vier Species mit benannten Zahlen; Resolvieren und Reducieren. Die Elemente der Decimalbruchrechnung im Anschluß an das dekadische System. Leichte Beispiele aus der Regel de tri zur Einübung und Anwendung des vorigen. Zerlegung der Zahlen in ihre Faktoren.

Quinta: Rechnen, 3 Std. Die vier Species der Decimalbrüche, das Rechnen mit gemeinen Brüchen nebst weiteren Anwendungen auf einfache Regel de tri-Aufgaben. Geometrische Propädeutik, 1 Std.

Quarta: Rechnen, 2 Std. Verwandlung von Decimalbrüchen in gemeine und umgekehrt. Abgekürzte Decimalbrüche. Die sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten (schwierigere Aufgaben der Regel de tri, Zinsrechnung, Tara-, Gewinn- und Verlust-, Rabatt- und Diskontorechnung, Gesellschafts- und Mischungsrechnung, zusammengesetzte Regel de tri). Wiederholungen mit Anwendung von Klammern, Auswertung von Formeln für bestimmte Zahlenbeispiele u. s. w. Geometrie, 2 Std. Die ersten Lehren von den geraden Linien, Winkeln und Parallelen. Die Sätze über die Winkel und Seiten der Dreiecke bis zu den Kongruenzsätzen und ihren einfachsten Anwendungen einschl.

Untertertia: Arithmetik, 1 Std. Addition und Subtraktion mit Buchstaben. Geometrie, 2 St. Die Lehren vom Parallelogramm und dem Trapez. Die Kreislehre, soweit der Begriff der Proportion keine Anwendung findet. Konstruktionsaufgaben zu unmittelbarer Anwendung der Lehrsätze und die leichteren nach den Methoden der Hilfsfiguren und der geometrischen Örter.

Obertertia: Arithmetik, 1 St. Multiplikation und Division mit Buchstaben. Die Proportionen. Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten. Geometrie, 2 Std. (Die leichteren Sätze vom Flächeninhalt.) Die Lehre von der Ähnlichkeit nebst ihren Anwendungen auf den Kreis. Schwierigere Konstruktionen nach den Methoden der geometrischen Örter und der Hilfsfiguren.

Untersekunda: Arithmetik, 2 St. Schwierigere Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten. Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten. Potenzen, Wurzeln und Logarithmen. Geometrie, 2 Std. Die Lehre vom Flächeninhalt geradliniger Figuren und die Kreisberechnung. Konstruktionen nach der Methode der ähnlichen Figuren und mit Verbindung verschiedener Methoden. Alge-

braische Analysis, soweit die gemischten Gleichungen zweiten Grades nicht erforderlich sind.

Obersekunda: Arithmetik, 2 St. Gleichungen zweiten Grades mit einer und mit mehreren Unbekannten. Anwendung derselben auf die Auflösung geometrischer Aufgaben durch algebraische Analysis. Diophantische Aufgaben ersten Grades. Exponentialgleichungen. Geometrie und Trigonometrie, 2 Std. Einige Abschnitte der neueren Geometrie (harmonische Teilung, Transversalen des Dreiecks, Ähnlichkeitspunkte, Potenzen bei dem Kreise u. dgl. nach Auswahl). Ebene Trigonometrie bis zur Erledigung der Fundamentalfälle bei dem schiefwinkeligen Dreieck, einschließlich der eingekleideten Aufgaben zur unmittelbaren Anwendung der letzteren.

Unterprima: Arithmetik, 2 Std. Arithmetische und geometrische Reihen, Zinseszinsen- und Rentenrechnung. Kettenbrüche. Kombinatorik. Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Binomischer Lehrsatz. Trigonometrie und Stereometrie, 2 St. Berechnung von Dreiecken aus mittelbaren Bestimmungsstücken und schwierigere Anwendungen. Die ersten Abschnitte der Stereometrie.

Oberprima: 4 Std. Beendigung der Stereometrie. Zusammenfassende Wiederholungen aus allen früheren Gebieten mit besonderer Berücksichtigung des wissenschaftlichen Aufbaues derselben. Synthetische Behandlung der Kegelschnitte.

Zweites Beispiel: Lehrplan eines Realgymnasiums mit vollständig getrennten Klassen.

Für die Klassen Sexta und Quinta derselbe Lehrplan, wie vorher.

Quarta: Rechnen, 2 Std., wie vorher. Geometrie, 3 Std., wie vorher, dazu die Sätze vom Viereck und leichte Konstruktionsaufgaben.

Untertertia: Arithmetik, 2 Std. Die vier Species der Buchstabenrechnung. Proportionen. Geometrie, 2 Std. Kreislehre und Konstruktionen, wie vorher, doch in größerer Ausdehnung. Rechnen, 1 St. Schwierigere Aufgaben aus der Diskont-, Termin- und Münzrechnung.

Obertertia: Arithmetik, 2 St. Gleichungen ersten Grades mit einer und mit mehreren Unbekannten. Potenzen und Wurzeln. Geometrie, 2 Std. Ähnlichkeit und Flächeninhalt. Konstruktionsaufgaben, wie in der Obertertia d. Gymn. Rechnen, 1 Std. Schwierigere Aufgaben aus den bürgerlichen Rechnungsarten.

Untersekunda: Arithmetik, 2 Std. Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten. Logarithmen. Diophantische und Exponentialgleichungen. Geometrie, 3 Std. Berechnung des Kreises. Algebraische Analysis geometrischer Aufgaben. Ebene Trigonometrie.

Obersekunda: Arithmetik, 2 Std. Gleichungen zweiten Grades

mit mehreren Unbekannten. Arithmetische und geometrische Reihen, Zinseszins- und Rentenrechnung, Kettenbrüche. Geometrie, 3 Std. Stereometrie und sphärische Trigonometrie.

Unterprima: Arithmetik, 2 Std. Kombinatorik und Anfangsgründe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Binomischer Lehrsatz. Gleichungen dritten Grades. Höhere arithmetische Reihen, Konvergenz der Reihen u. a. Abschnitte aus den Elementen der niederen Analysis. Geometrie, 3 Std. Neuere Geometrie. Anfangsgründe der analytischen Geometrie.

Oberprima: 5 Std. Vervollständigung des arithmetischen Pensums der Unterprima. Wiederholungen aus allen Gebieten. — Fortsetzung der analytischen Geometrie. Deskriptive Geometrie.

Anderweitige Lehrpläne der verschiedensten Art kann der Anfänger in großer Anzahl aus den Programmen der höheren Lehranstalten kennen lernen. Da dieselben durch den Programmaustausch allgemein zugänglich sind, so wird es unnötig sein, noch weitere Beispiele für verschiedene Verhältnisse zu bilden. Die im vorstehenden ausgeführten dürften selbst in günstigen Fällen das Maximum der Forderungen enthalten, welche an den Unterricht gestellt werden dürfen, ohne die Grenzen desjenigen zu überschreiten, was der Arbeitskraft und dem Verständnis der Durchschnittsschüler innerhalb der zu Gebote stehenden Zeit zugemutet werden kann.

§ 21. Das Lehrbuch.

Daß dem mathematischen Schulunterricht ein Lehrbuch zu Grunde zu legen ist, wird fast allgemein anerkannt und ist auch durch ministerielle Verfügungen vorgeschrieben worden. Gleichwohl wird es nötig sein, die Frage zu erörtern, für welche Zwecke ein solches Hilfsmittel notwendig oder dienlich ist, denn von der Beantwortung dieser Frage hängt die weitere ab, welche Einrichtung das Lehrbuch haben soll, und nach welcher Richtung daher eine Wahl zwischen den zahlreichen vorhandenen Leitfäden zu treffen ist.

Die Circularverfügung des preußischen Kultusministeriums vom 24. Dez. 1833 stellt an das mathematische Lehrbuch die dreifache Forderung, „daß es sowohl bei der Präparation als auch in der Klasse beim Vortrage des Lehrers und endlich bei der Repetition den Schülern einen festen Anhalt biete". Damit scheinen allerdings alle die Fälle erschöpft, in welchen ein Lehrbuch bei dem Schulunterricht Verwendung finden kann.

Die erste Art der Benutzung desselben, nämlich diejenige zur häuslichen Vorbereitung auf das in der kommenden Stunde neu Durchzunehmende, kann jedoch nach dem gegenwärtigen Standpunkt der Methodik nicht mehr als richtig anerkannt werden. Denn es liegt in dem Wesen des mathematischen Lehrstoffs und in der Hauptaufgabe

seines Unterrichts, das Begriffs-, Urteils- und Schlußvermögen zu fördern, daß der Schüler bei der ersten Einführung in neue Sätze oder Aufgaben nicht seiner eigenen Auffassungskraft allein überlassen werden darf, sondern dazu in der Regel der Hilfe des mündlichen Unterrichts bedarf. Nur diesem kann es gelingen, den Mangel an Verständnis zu beseitigen, unklaren oder schiefen Auffassungen zuvorzukommen und über die Hindernisse, welche der Einzelne bald hier, bald dort findet, hinwegzuhelfen, ohne doch die Selbstthätigkeit der Denkkraft des Schülers zu hemmen, wie dies ein Lehrbuch thun würde, welches mit der vollen für diese Zwecke erforderlichen Ausführlichkeit verfaßt wäre. „Außerdem ginge der anregende Einfluß der viva vox des Lehrers verloren; wie in den französischen Lyceen würde er Repetent; auf den Reiz der Neuheit, die Abwechselung in den Methoden, das oft sichtlich Packende eines eleganten Beweises, einer überraschenden Lösung müßte verzichtet und damit so wichtige pädagogische Momente zur Belebung des an und für sich ja abstrakten Unterrichtszweiges unbenutzt gelassen werden. — Der Gewinn an Zeit, den man sich von einer Präparation versprechen könnte, ist ein problematischer; die Sätze müssen ebenso eingehend durchgenommen werden, sie werden um nichts leichter bei dem Gros der Schüler Verständnis finden, während diejenigen, welche etwa durch die Vorbereitung ihrer mächtig geworden sind, geistig müßig gehen müssen. — Der erfahrungsmäßig häufig eintretende Fall, daß die Schüler trotz der Forderung nicht präparieren, ist dabei gar nicht in Rechnung gezogen, auch nicht der schwerwiegende Übelstand, daß die häusliche Arbeit durch eine Vorbereitung auf mathematische Nova ungebührlich vergrößert wird.*)

Auch der Gebrauch des Lehrbuchs während der Unterrichtsstunden hat seine sehr bedenklichen Seiten. Die Empfehlung desselben dürfte wesentlich von der Ansicht ausgehen, daß das Erlernen der einzelnen Sätze und ihrer Beweise, wie sie fix und fertig im Lehrbuche stehen, das Ziel sei, welchem der Unterricht zuzustreben habe. Jeder, der im Gegensatz hierzu ein entwickelndes Verfahren, wie es in früheren Beispielen (§ 11—15) gezeigt worden, für das beste hält, um die formalen Bildungsaufgaben des mathematischen Unterrichts zu erfüllen, wird es für einen Nachteil ansehen, wenn das zu Lernende schon fertig und in gegebener Form vorliegt. Dasselbe soll ja vielmehr erst vor den Augen der Schüler und unter ihrer Mitarbeit entstehen und ebenso durch Selbstthätigkeit der Lernenden in die geeignete sprachliche Form gekleidet werden.

Demnach kann dem Lehrbuche, von Ausnahmefällen abgesehen, nur die Aufgabe erteilt werden, die häusliche Wiederholung des in der Stunde Durchgenommenen zu ermöglichen und zu erleichtern. Eine solche Wiederholung ist notwendig, weil das Gelernte der Einübung

*) Haebe im Progr. d. Gymnasiums zu Nakel, 1880, S. 26.

bedarf, und diese nicht bloß in den Lehrstunden vorgenommen werden kann. Selbst wenn die letzteren in der dazu erforderlichen viel größeren Anzahl zu Gebote ständen, würde doch die ausschließliche Leitung des Schülers durch den Lehrer nicht gutgeheißen werden können, denn der Schüler soll nicht bloß am Gängelbande gehalten werden, sondern auch allein arbeiten lernen. Dazu bedarf er freilich der eingehendsten Anleitung und Vorbereitung durch den mündlichen Unterricht, und auch zu Hause darf ihm eine Hilfe nicht fehlen, welche es ihm ermöglicht, die ihm entfallenen Glieder der Schlußreihen auch in dem Falle wiederzufinden, daß seine eigene Kraft dazu noch nicht ausreicht. Das Lehrbuch soll also den Schüler an das im Unterricht Durchgenommene erinnern und außerdem dazu dienen, ihm das jedesmal aufgegebene Arbeitspensum scharf zu bezeichnen. Von der Mitteilung von Übungsstoff zur Anwendung und weiteren Einprägung sehen wir hierbei noch ab, da diese Frage an anderer Stelle Behandlung zu finden hat.

Daß die häusliche Arbeit nicht völlig entbehrt werden könne, und daß der Schüler für dieselbe eine Hilfe haben müsse, ist auch wohl nur ausnahmsweise bezweifelt worden. Wo ein Lehrbuch zu diesem Zweck für entbehrlich gehalten wurde, hat man in der Regel dasselbe nur durch andere Mittel zu ersetzen gesucht. Von diesen sind Arbeitsstunden unter Aufsicht eines Lehrers oder auch eigentliche Nachhilfestunden hier und da gewiß nützlich oder selbst notwendig; als Regel können dieselben schon um der zu wünschenden Selbständigkeit willen nicht in betracht kommen. Das Nachschreiben der Schüler in den Stunden oder gar das Diktieren des zu Lernenden seitens des Lehrers behufs eigener Anfertigung eines geschriebenen Lehrbuches, wie es früher vielfach üblich war, stellt so große Anforderungen an die richtige Auffassung der Schüler oder an die zu Gebote stehende Zeit, daß es mit Recht neuerdings gänzlich verworfen und selbst untersagt wird.

Welches sind nun die wichtigsten Grundsätze, die bei der Prüfung und Wahl eines mathematischen Lehrbuchs zu dem angegebenen Zwecke beachtet werden müssen? Daß dasselbe seinerseits nicht gegen die Forderungen verstoßen darf, welche an den Unterricht selbst gestellt werden, ist selbstverständlich. Es darf also nichts wissenschaftlich Falsches oder auch nur Bedenkliches enthalten, muß dabei sich thunlichst dem fortschreitenden Verständnis der Schüler anbequemen und möglichste Korrektheit des sprachlichen Ausdrucks zeigen.

Dies vorausgesetzt unterscheiden wir zunächst zwischen ausführlichen Lehrbüchern, welche alle Beweise und Auflösungen vollständig bis in die entferntesten Schlußfolgerungen geben, und kurzen, welche alle diejenigen Entwickelungen nur andeuten, deren Ausführung nach Ansicht der Verfasser der eigenen Thätigkeit der vom Lehrer angeleiteten Schüler überwiesen werden kann. Beide Arten haben ihre Freunde und Verteidiger gefunden.

Unter den Gründen, welche für den Gebrauch ausführlicher Lehr-

bücher geltend gemacht werden, begegnen wir zunächst demjenigen, daß im anderen Fall die Ausarbeitung eines Heftes von seiten der Schüler nicht zu umgehen sei, um die kurzen Sätze des Lehrbuchs zu vervollständigen und weiter auszuführen. Selbst wer zugebe, daß solche Ausarbeitungen, die den Schüler zu sorgfältiger Auseinanderlegung des Gedankengangs zwingen, unter Umständen sehr nützlich sein könnten, müsse doch den großen Zeitverlust bedauern, der mit denselben verbunden sei. Diese Zeit könne ungleich fruchtbringender auf eine zweckmäßige Vorbereitung zu den Lehrstunden und auf die unerläßliche Wiederholung des früher Gelernten, sowie auf die selbständige Behandlung von Übungssätzen und Aufgaben verwendet werden, wenn die Schüler ein Lehrbuch in Händen hätten, welches die Sätze der Wissenschaft in ganzer Vollständigkeit darbiete. Erste Anfänger in der Mathematik besäßen zudem selten denjenigen Grad geistiger Gewandtheit, der zur Ausarbeitung eines brauchbaren Heftes nach dem Vortrag des Lehrers erforderlich sei, daher gelinge ihnen die schriftliche Abfassung eines Beweises zu Hause häufig nur sehr unvollkommen, auch wenn sie denselben in der Schule noch so gut verstanden hätten. Zu leicht komme Mangelhaftes und Falsches mit aufs Papier, was der Lehrer bei der Durchsicht zwar anmerken, aber nicht immer ergänzen und verbessern könne. Daher komme es denn auch, daß die Schüler sich später nur mit Mühe in dem wieder zurecht finden könnten, was sie früher niedergeschrieben hätten.*) Zudem werde dem Lehrer durch die notwendige genaue Durchsicht und Korrektur sämtlicher Hefte eine ungebührliche Arbeitslast aufgeladen, den Schülern aber häufig auch deshalb nichts genützt, weil das Abschreiben von einander nicht verhindert werden könne.

Man kann alles, was hier gegen die — vorher von uns bereits verurteilte — Ausarbeitung des Lehrsystems in Schülerheften gesagt ist, unbedingt für richtig erklären, ohne daß man deshalb genötigt ist, der Anwendung desselben zu gunsten ausführlicher Lehrbücher zuzustimmen. Man hat zu diesem Zweck nur die Richtigkeit der Behauptung zu verneinen, daß die kurzen Leitfäden solche Schülerhefte nötig machen; mit dieser Behauptung fällt die ganze Begründung. Allerdings soll der Schüler die vollständigen Beweise zu Hause wiederholen, aber weshalb soll es n o t w e n d i g sein, daß dies schriftlich geschehe? Ist es nicht genug, wenn der Schüler lernt, den Beweis in der nächsten Stunde mündlich vorzutragen, und kann diese mündliche Repetition nicht hinreichend gründlich, wenn auch mit der Feder in der Hand zum Fixieren des Wichtigsten, so doch ohne vollständiges Niederschreiben des Gedachten geschehen? Die Frage, um die es sich hier handelt, geht zunächst offenbar dahin, ob die Schüler imstande seien, den im Unterricht entwickelten und auch schon wiederholten Gedankengang bloß auf Grund kurzer An-

*) Kunze in der Vorrede zu seinem Lehrbuch der Geometrie.

deutungen des Lehrbuches zu Hause zu wiederholen, oder ob diese Wiederholung nur möglich, bezw. gesichert sei, wenn ihnen jener Gedankengang in vollständiger Ausführung zum Nachlesen vorliege. Ist das erstere nicht möglich, so kann der Schüler auch kein Heft ausarbeiten; ist es möglich, so bedarf er, wenigstens zum Zweck der unmittelbaren Wiederholung für die nächste Stunde, des Heftes nicht. Die Entscheidung auf diese Frage wird sich a priori kaum geben lassen; die Erfahrung wird für dieselbe maßgebend sein müssen. Diese Erfahrung wird aber wieder sehr verschiedene Ergebnisse liefern können, da sie von der Beschaffenheit des Schülermaterials, von der angewandten Lehrmethode und von der Art der Ausführungen des gebrauchten Lehrbuchs abhängt.

Wenn beispielsweise ein Lehrer in seinem Unterricht ausschließlich oder vorwiegend die dozierende Methode anwendet, und wenn infolge dessen manche Schüler in der Stunde nicht zum rechten Verständnis des Vorgetragenen gelangen, so wird ein geschickt abgefaßtes ausführliches Lehrbuch nicht selten gute Dienste thun, indem es durch seine eingehende Darstellung dem strebsamen Schüler eine Art Nachunterricht bietet, ihm dunkel gebliebene Punkte aufhellt und ihm Zeit läßt, bei langsamer Lektüre das Vorgetragene zu verarbeiten. Andere Schüler werden sich über unverstandene Stellen mit gedächtnismäßiger, wenn auch nicht eben wörtlicher Einprägung des im Lehrbuche Stehenden hinweghelfen und so wenigstens den Schein von Leistungen herbeiführen. Jedenfalls kann ein schlechter Unterricht durch das ausführliche, zum Selbstunterricht bestimmte Lehrbuch eines guten Lehrers in etwas verbessert werden, während er mit einem nur andeutenden in keiner Weise fertig werden kann. In derartigen Fällen würde also die Erfahrung des Lehrers mit nicht hinreichendem Rechte zu gunsten der ausführlichen Lehrbücher ins Feld gestellt werden.

Ein andermal wird auch der tüchtigste Lehrer bei nicht propädeutisch gehörig vorgebildeten Schülern in den mittleren Klassen finden, daß vielen derselben die ihnen zugemuteten Abstraktionen zu schwer fallen. (Vgl. § 40.) Kommt noch eine Überfüllung der Klasse hinzu, welche eine eingehende Beschäftigung mit dem einzelnen Schüler hindert, so können recht viele zurückbleiben, wenn ihnen nicht Gelegenheit gegeben wird, auch außer der Schule den vollständigen Gedankengang mehrfach wiederholt im Buche nachzulesen. Dieselben Schüler werden aber möglicherweise in späteren Klassen sich hinreichend befähigt erweisen, auf Grund des bereits erworbenen Könnens mit einem kurzen Lehrbuche zu arbeiten, ohne daß doch diese Erfahrung gemacht wird, da der Unterricht gewohnheitsmäßig, oder weil das betreffende Lehrbuch einmal eingeführt ist, bei demselben verbleibt.

Während man hiernach zugeben muß, daß die zu gunsten ausführlicher Lehrbücher gemachten Erfahrungen nicht immer einwandfrei zu sein brauchen, läßt sich dies im entgegengesetzten Fall nicht in gleichem Maße behaupten, wenn man von groben Selbsttäuschungen der Lehrer

über die von ihnen erzielten Erfolge absieht. Die große Verbreitung einzelner nicht oder nur halb ausführlicher Lehrbücher zeigt aber, daß an vielen Schulen mit denselben befriedigende Resultate erzielt werden müssen, auch haben sich zahlreiche und zum Teil namhafte Stimmen in dieser Richtung ausgesprochen. Sonach scheint das größere Gewicht der Erfahrung bei der Entscheidung der obigen Frage auf der Seite der nicht ausführlichen Lehrbücher zu liegen.

Gegen die letzteren werden aber noch weitere Gründe aufgeführt: Wenn gleich eine Vorbereitung auf das in kommenden Stunden neu Durchzunehmende ausgeschlossen sein soll, und auch die Wiederholung von Stunde zu Stunde auf Grund der noch frischen Erinnerung für ausführbar erklärt werden kann, so bleibt häusliche Repetition doch auch nach kürzeren und längeren Zwischenzeiten nötig, und diese ist den Schülern auf angemessene Art zu erleichtern, weil sie außerdem noch Arbeit genug zu leisten haben und den übrigen Lehrfächern auch gerecht werden sollen. Es bleibt daher wünschenswert, daß ihnen der Unterrichtsstoff in ausführlicher, dem Verständnis der Schwächeren auch nach längerer Zwischenzeit ohne zu große Mühe zugänglicher Darstellung vorliegt.*) Dieser Grund hat gewiß etwas für sich, nur fehlt der Nachweis, daß für Schüler, welche in der genetisch-analytischen Entwickelung der Lehrsätze und Beweise geübt worden sind, die Wiederholung auf Grund der Andeutungen des kürzeren Lehrbuches auch nach längerer Zwischenzeit nicht eine hinreichend leichte Aufgabe sei. Sollte nicht gerade darin, daß die Schüler sich hierzu befähigt erweisen, eine Probe darauf liegen, daß der Unterricht seinen Zweck erreicht habe, und würde nicht umgekehrt in der Thatsache, daß der Schüler zur leichten Wiederholung nicht fähig wäre, wenn ihm nicht der vollständige Gedankengang in voller Ausführlichkeit wieder vorgeführt würde, der Beweis gesehen werden können, daß der Unterricht seiner Zeit keinen rechten Erfolg gehabt habe? Bedenkt man, daß jeder Fortschritt auf mathematischem Gebiete nur durch die Anwendung und somit auch die Auffrischung von früher Gelerntem geschieht, so wird man geneigt werden, diese Frage zu bejahen.

Man führt endlich noch an, daß das Lehrbuch auch die Aufgabe erfüllen müsse, solchen Schülern, welche durch Krankheit oder andere Umstände genötigt wurden, eine oder mehrere Lehrstunden zu versäumen, oder auch überhaupt solchen, welche hinter den Anforderungen der Klasse zurückgeblieben seien, Gelegenheit zum Nachholen durch Privatfleiß zu bieten. Von allen Gründen für die ausführlichen Lehrbücher scheint dieser der schwächste zu sein. Solche Schüler, welche der lebendige Unterricht des Lehrers nicht hinreichend zu fördern vermochte, werden auch nicht imstande oder willens sein, ohne denselben, aus eigener Kraft durch Selbststudium das Versäumte nachzuholen.

---

*) Nach einem neueren Lehrb. d. ebenen Geometrie, Vorrede.

Auch da, wo die geistige Fähigkeit zu selbständiger Ausfüllung von Lücken, wo ferner der erforderliche gute Wille und die Kraft denselben durchzusetzen vorhanden sind, bei tüchtigen Schülern also, welche längere Zeit dem Unterrichte nicht beiwohnen konnten, oder bei solchen, die von einer Lehranstalt auf eine andere mit abweichendem Lehrplan übergingen, werden im allgemeinen besondere Nachhilfestunden nötig sein, um das Ziel zur richtigen Zeit zu erreichen. Kürzere Versäumnisse werden durch die so wie so stattfindenden Repetitionen im Unterricht ihre Ausgleichung finden können. Vor allem aber ist zu bemerken, daß das Lehrbuch dem regelmäßigen Unterricht und nicht Ausnahmefällen dienen soll, und daß in letzteren ein für den besonderen Zweck des Selbstunterrichts eigens verfaßtes Lehrbuch, welches sich im Besitze der Schulbibliothek oder des Lehrers befinden wird, geeigneter sein wird, als ein Werk, dem die Aufgabe gestellt worden, zweien Herren zugleich zu dienen, nämlich einmal den Lehrer zu unterstützen, und dann denselben zu ersetzen.

Daß aber kurzgefaßte Lehrbücher geeigneter seien, die Aufgaben des mathematischen Schulunterrichts erreichen zu helfen, wird von den Freunden derselben dadurch zu begründen gesucht, daß der Schüler nur mittels eines solchen zu der notwendigen Selbstthätigkeit gezwungen werden könne. Indem die ausführlichen Lehrbücher ihm alle Schlußfolgerungen, auch diejenigen, die er ganz allein ausführen könne, fertig darböten, begünstigten sie das mechanische Arbeiten, eine zu weitgehende Anwendung des bloßen Gedächtnisses und hinderten den Lehrer im Unterricht den Schüler durch eigene Anstrengung das finden zu lassen, was dieser schon vorher fertig im Lehrbuche habe lesen können. Wenn z. B. der Satz, daß die Gegenseiten im Parallelogramm einander gleich sind, bewiesen werden solle, so genüge auch für die häusliche Wiederholung, daß das Buch an die zu ziehende Diagonale und den zu gebrauchenden Kongruenzsatz erinnere; die spezielle Ausführung werde der Schüler nicht selbstthätig machen, wenn er sie bequem in seinem Lehrbuche nachlesen könne. Weil aber mit dem Lesen keineswegs notwendig das Denken verbunden sei, so werde der Schüler häufig seiner Neigung, Worte für Begriffe zu nehmen, nachgeben. Alles dies sei nicht möglich, wenn derselbe die Ausführung selbst machen müsse. Daß er dieselbe selbst gedacht, sichere sie ihm als geistiges Eigentum. Jedenfalls seien die kurzen Lehrbücher mehr geeignet, die Anwendung der heuristischen und analytischen Methode im Unterricht zu erleichtern.

Bei derartigen Kontroversen, welche von zwei extremen Standpunkten aus geführt werden, pflegt auf keiner von beiden Seiten das volle Unrecht zu sein. Es kann also auch keiner von ihnen durchweg Recht gegeben werden, vielmehr wird eine richtige Ansicht die Extreme zu vermeiden suchen. Es muß gewiß zugestanden werden, daß solche Lehrbücher, welche alle Partien mit gleicher Kürze behandeln, vielfach die Gefahr herbeirufen können, den Schülern unverständlich zu bleiben

oder wenigstens ihnen nicht immer die wünschenswerte Hilfe zu bieten, während solche, welche alles mit gleicher Ausführlichkeit entwickeln, dadurch schaden, daß sie den Schülern die Mühe des eigenen Denkens zu oft abnehmen oder doch dasselbe zu wenig fördern. Daher sind für den noch ungeübten Anfänger die meisten Entwickelungen ausführlich zu geben. Je mehr aber die Befähigung desselben zu selbständigem Schließen fortschreitet, desto mehr muß die Ausführlichkeit der Kürze weichen, und nur dort darf und soll dieselbe auch in den späteren Abschnitten bleiben, wo ganz neue Anschauungen, ungewohnte und ungeübte Schlußweisen, oder neue, schwierige Begriffe auftreten. Wir verlangen also, was fast selbstverständlich klingt, daß die Lehrbücher ihren Inhalt der fortschreitenden geistigen Entwickelung der vom Quartaner zum Primaner heranwachsenden Schüler anpassen, womit keineswegs die Notwendigkeit verbunden ist, dem noch nicht ausgebildeten Verständnis die Strenge der Entwickelungen zu opfern. Denn nicht zu popularisieren, über Schwierigkeiten oberflächlich hinwegzugehen oder dieselben zu verdecken, sondern die Überwindung derselben durch größere Ausführlichkeit der Darstellung, durch genaueres Eingehen zu erleichtern, das ist die Aufgabe, welche in dieser Beziehung erfüllt werden soll. Wir halten diejenigen Lehrbücher für die besten, denen die Scheidung zwischen dem, was der eigenen Arbeit der Schüler überlassen werden kann und soll, und dem, was ihnen auch im Buche näher erläutert und ausgeführt werden muß, am richtigsten gelungen ist, ohne dabei den Vorwurf wissenschaftlich oberflächlicher oder sprachlich nicht genügend präciser Darstellung auf sich zu laden.

Es ist durchaus nicht leicht, in allen diesen Beziehungen die richtigen Grenzen zu wahren, und deshalb sollten jüngere Lehrer, denen hinreichende Erfahrungen noch abgehen, es unterlassen, die Welt mit Lehrbüchern zu bereichern. Unter der Flut von Schriften, welche unsere Litteratur auf dem Gebiete der Elementarmathematik aufweist, finden sich manche, welche den Eindruck machen, als ob ihre Verfasser der Ansicht seien, daß jeder ein Schulbuch schreiben könne, der die betreffende Disciplin nur selbst erlernt oder allenfalls in einem oder einigen Unterrichtskursen gelehrt habe. Zugleich möchten wir an dieser Stelle den jungen Lehrer davor warnen, sich zu früh zum Recensenten von Schulbüchern aufzuwerfen, wozu gerade ein lebhaftes Interesse für den Unterricht und die leichte Gelegenheit, welche hier und da geboten wird, verführen können. Er wird zu leicht in die Lage kommen, von einem noch mehr oder minder einseitigen Standpunkte aus zu loben oder zu tadeln und hierdurch Schaden anzurichten. Denn merkwürdigerweise scheinen viele zu glauben, daß jeder, welcher die Leistungen anderer in Zeitschriften beurteilt, auch dazu berufen und jedenfalls dem Verfasser der besprochenen Schrift in seinem Urteil überlegen sei. Das audiatur et altera pars, welches zuweilen zu einem ganz anderen Resultate führen dürfte, ist in solchen Fällen mindestens sehr erschwert.

Kehren wir nach dieser Abschweifung, welche der geneigte Leser entschuldigen möge, zu der Frage der Auswahl eines Lehrbuches zurück, so dürfte zunächst zu bemerken sein, daß der im Vorigen angelegte Maßstab kein absoluter ist, sondern je nach den Verhältnissen der Schule schwankt. Wo das Schülermaterial erfahrungsmäßig schwerfällig im Begreifen ist, wo es nicht möglich war, durch eine gute Propädeutik den Unterricht zu erleichtern, wo überfüllte Klassen oder die mangelnde Trennung zweier Klassenabteilungen die Thätigkeit des Lehrers hemmen, da wird man ein Lehrbuch wünschen, welches mehr nach der Seite der Ausführlichkeit neigt. Wo das Gegenteil stattfindet, wird der Lehrer vielleicht manches kurze Buch noch nicht kurz genug finden. Daß unsere Schulbücherlitteratur in dieser Richtung eine Auswahl zwischen verschiedenen in ihrer Art brauchbaren Werken ermöglicht, ist daher gewiß mit Dank anzuerkennen.

Einen zweiten Anlaß zu verschiedener Wahl des Lehrbuches kann die Verschiedenheit der Schulkategorien bieten. Zwar ist die Mathematik dieselbe Wissenschaft für humanistische, wie realistische Schulanstalten, allein die Ausdehnung, in welcher dieselbe betrieben wird, ist doch nicht die gleiche, und die verschiedene Stundenzahl, das Hinzutreten weiter gehender Gebiete in der Prima bedingen eine abweichende Verteilung des Lehrstoffs auf verschiedene Altersstufen. Der Lehrer am Realgymnasium z. B. wird deshalb wünschen können, daß diese oder jene Unterrichtspartie in das Lehrbuch aufgenommen sei, welche der Lehrer an einem humanistischen Gymnasium entbehren kann, er wird auch verlangen dürfen, daß einzelne Abschnitte mehr oder minder abweichend behandelt seien. Insbesondere werden sich solche Unterscheidungen auch bei der Auswahl der Übungsbücher (Aufgabensammlungen) geltend machen, auf welche wir am besten bei der Besprechung der einzelnen Disciplinen näher eingehen werden. Auch die Wahl der Logarithmentafeln soll an der dieselben besonders betreffenden Stelle (§ 31) besprochen werden.

Als ein dritter maßgebender Faktor bei der Auswahl eines Lehrbuches ist die Art und Weise der Anordnung des sachlichen Inhaltes und der methodischen Behandlungsweise desselben überhaupt anzusehen. Hierher gehört z. B. in der Geometrie die Frage, ob die Anschauungen und die Methode der sogenannten neueren Geometrie schon in den elementaren Unterricht aufgenommen werden sollen, in welchem Falle auch das Lehrbuch in entsprechendem Sinne verfaßt sein muß. In ähnlicher Weise führt die Anerkennung der genetischen Methode zu der Forderung einer derselben entsprechenden Reihenfolge der einzelnen Lehren und Sätze, wobei dann noch gefragt werden kann, ob das Lehrbuch auch die Aufgabe hat, den genetischen Zusammenhang seinerseits in Worten zu entwickeln, oder ob dies Sache des mündlichen Unterrichts ist. Auch die Auswahl und Behandlung des Übungsmaterials gehört hierher, da man sich darüber zu entscheiden hat, ob das letztere

durch ein selbständiges Buch vertreten werden soll, oder ob es zweckmäßiger ist, daß das Lehrbuch auch die Übungsaufgaben in engem Anschluß an seinen eigenen Inhalt und dessen systematische Ordnung bearbeitet darbiete. Alle diese Fragen dürften ebenfalls ihre Erledigung am passendsten bei der besonderen Besprechung der einzelnen Gebiete finden.

§ 22. Fortsetzung.

Wir geben nun im folgenden noch eine kurze Übersicht über einige der verbreitetsten oder sonst gut empfohlenen Lehrbücher.

Das Januarheft 1880 des „Centralblattes für die gesamte Unterrichtsverwaltung in Preußen" enthielt eine Übersicht über die Verbreitung der verschiedenen Schulbücher an den höheren Lehranstalten Preußens. Da neuere amtliche Feststellungen ähnlicher Art nicht vorhanden sind, so müssen wir den nachfolgenden Angaben die obige Zusammenstellung zu Grunde legen.

Nach derselben wurden damals an den preußischen höheren Schulen nicht weniger als 99 verschiedene mathematische Lehrbücher, ausschließlich der Aufgabensammlungen und der Logarithmentafeln, gebraucht. Unter diesen waren 55 nur an je einer einzigen Anstalt eingeführt, und nur 4 Lehrbücher erfreuten sich des Gebrauches an mehr als 25 Schulen. Diese vier waren diejenigen von Kambly, Koppe, Mehler und Reidt. Unter ihnen ragte wieder in dominierender Weise das von Kambly mit 217 Anstalten hervor. Besonders auffallend erschien auch die Thatsache, daß mehrere allbekannte und gut empfohlene Schriften, wie die auch von uns weiterhin (S. 87 u. 88) zu nennenden von H. Müller und von Kruse, keine einzige, andere, wie Worpitzky und Brockmann, nur eine Einführung aufzuweisen hatten.

Allgemein giltige Schlußfolgerungen lassen sich freilich aus diesen Zahlen deshalb nicht ziehen, weil die Zusammenstellung sich auf das Königreich Preußen beschränkte. Es ist gewiß, daß einzelne Lehrbücher sich auch außerhalb desselben einer großen Verbreitung erfreuen und manche fast nur in den anderen Staaten deutscher Zunge gebraucht werden. In Österreich nimmt Močnik ungefähr die Stellung ein, wie Kambly in Preußen.

Man wird jedoch immerhin aus den obigen Zahlen schließen dürfen, daß die überwiegende Mehrzahl der elementar-mathematischen Lehrbücher, welche die deutsche Litteratur aufweist, und welche sich noch jährlich vermehren, in der großen Flut derselben wieder untergeht, ohne einen nachhaltigen, allgemeineren Einfluß auf die praktische Gestaltung des Unterrichts auszuüben. Hierfür sprechen nicht bloß jene 55 Bücher, bei denen die Vermutung gerechtfertigt sein wird, daß die meisten nur an derjenigen Schule gebraucht werden, an welcher ihr Verfasser angestellt ist, sondern noch mehr die weitergehende An-

gabe, daß auch von den übrigen nicht weniger als 17 an nur zwei Anstalten, und überhaupt 89, also 90 Prozent aller aufgeführten Lehrbücher an weniger als je 10 Anstalten Gebrauch gefunden hatten.

Es wird daher gerechtfertigt sein, wenn wir auch in der nachstehenden Aufzählung auf Vollständigkeit verzichten, und nur solche Lehrbücher auswählen, welche entweder, wie die vier oben angeführten, eine hervorragende Verbreitung besitzen, oder welche uns für den Lehrer nach der einen oder anderen Richtung anregend und zur Kenntnisnahme empfehlenswert erscheinen. Daß auch hierbei noch Lücken bleiben werden, wird der Natur der Sache nach nicht zu vermeiden sein, denn das Studium der gesamten großen Anzahl der existierenden mathematischen Schulbücher dürfte von dem Verfasser des vorliegenden Buches nicht verlangt werden können, zumal es für den Zweck dieses Buches auch nicht notwendig ist. Der Verf. bittet jedoch, ihn auf Übersehenes behufs etwaiger späterer Benutzung aufmerksam machen zu wollen.

Eine spezielle Besprechung der im nachstehenden aufgeführten Schriften ist übrigens nicht beabsichtigt worden. Wir überlassen vielmehr die Beurteilung im einzelnen den betreffenden Zeitschriften und der eigenen Kenntnisnahme der Lehrer, um einen durchaus unparteiischen Standpunkt zu wahren. Die Angabe der Preise ist unterblieben, obgleich dieselbe vielleicht manchen erwünscht wäre, weil dieselben bei neu erscheinenden Ausgaben sich zuweilen verändern, und weil jede Buchhandlung den erforderlichen Bescheid geben wird.

1. Kambly, die Elementarmathematik. Breslau, F. Hirt. Vier Teile: 1. Arithmetik und Algebra, 2. Planimetrie, 3. Ebene und sphärische Trigonometrie, 4. Stereometrie.

Nimmt insofern eine vermittelnde Stellung zwischen den ausführlichen und den kurzen Lehrbüchern ein, als in den ersten Partien fast durchweg die Beweise vollständig entwickelt sind, während in den späteren Teilen die Selbstthätigkeit der Schüler mehr in Anspruch genommen wird. Synthetische Form der Darstellung. Beschränkung des Inhalts auf das Notwendigste. Übungsmaterial, nicht sehr reichhaltig, am Schluß der einzelnen Teile zusammengestellt, nur bei Teil 1 fehlend.

2. Die Lehrbücher von Koppe, bearbeitet von Dahl, Essen bei Bädeker, erscheinen unter getrennten Titeln: Die Arithmetik und Algebra; die Planimetrie; die Stereometrie; die Trigonometrie; die sphärische Trigonometrie; die algebraische Analysis; die Kegelschnitte. Derselbe Verf. schrieb auch einen „Method. Leitfaden f. d. Unterricht im Rechnen".

Die Koppeschen math. Lehrbücher sind für den Schul- und den Selbstunterricht bestimmt, daher ausführlich in der Form. Auch der Inhalt ist reichhaltig. Aufgaben, zum Teil mit den Auflösungen, sind angefügt, außerdem wird auf weitergehende Aufgabensammlungen verwiesen.

3. Mehler, Hauptsätze der Elementarmathematik. Mit einem Vorwort von Prof. Dr. Schellbach. Berlin, Reimer.

„Dieses Werk ist der ausgezeichnetste Vertreter derjenigen Richtung des math. Unterrichts, welche dem Schüler nur das Skelett des Lehrstoffs giebt und die Umkleidung desselben mit der lebendigen Form dem Lehrer überläßt.“ (Zeitschr. f. math. u. naturw. Unt. III, 34.) Dasselbe giebt also den Unterrichtsstoff auf möglichst knappem Raume. Anfangs fast nur eine Zusammenstellung der Lehrsätze, Aufgaben u. s. w. In den späteren Auflagen ist „das Hauptsächlichste nicht blos in den Resultaten, sondern zugleich mit der Begründung“ gegeben worden.

4. Reidt, die Elemente der Mathematik. Berlin, G. Grote. Vier Teile: 1. Arithmetik und Algebra, 2. Planimetrie, 3. Stereometrie, 4. Trigonometrie.

Vermittelnde Stellung zwischen kurzen und ausführlichen Lehrbüchern. Reichliches Übungsmaterial mit Anleitung zur Behandlung, bei Teil 2 bis 4 im Anschluß an die einzelnen Paragraphen, zu Teil 1 durch eine separate Aufgabensammlung. (Vgl. § 27.)

5. Baltzer, die Elemente der Mathematik. Leipzig, Hirzel. Zwei Bände: 1. Gemeine und allgemeine Arithmetik, Algebra; 2. Planimetrie, Stereometrie, Trigonometrie.

Weniger Schulbuch, als für ein weiteres Studium geeignet. Hervorragend durch wissenschaftlich allgemeine Darstellung.

6. Helmes, die Elementarmathematik. Hannover, Hahn. Vier Teile: 1. Die Arithmetik und Algebra, 2. Die Planimetrie, 3. Die ebene Trigonometrie, 4. Die Stereometrie und sphärische Trigonometrie.

Ein sehr ausführliches und gründliches Buch, eines der besten zum Selbstunterricht.

7. Spieker, Lehrbuch der ebenen Geometrie. Potsdam, Stein.

Viel gebrauchtes Buch mit ziemlich ausführlicher Darstellung nach Form und Inhalt. Auch auf die Übungsaufgaben ist eingehende Rücksicht genommen. Von demselben Verfasser erschienen in neuerer Zeit in demselben Verlage und in ähnlicher Behandlungsweise:

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra und Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie.

8. Wittstein, Lehrbuch der Elementarmathematik. Hannover, Hahn. Drei Bände in je zwei Abteilungen: I, 1. Arithmetik; 2. Planimetrie; II, 1. Trigonometrie; 2. Stereometrie; III, 1. Analysis; 2. Analytische Geometrie.

Ziemlich umfangreiches und recht gründliches Werk.

9. Gallenkamp, die Elemente der Mathematik. Iserlohn, Bädeker. Vier Teile: 1. Planimetrie, 2. Arithmetik und Algebra, Stereometrie und Trigonometrie, 3. Analysis, Analytische Geometrie, 4. Synthetische Geometrie.

Bei sehr knapper und strengwissenschaftlicher Darstellungsform bietet dieses Buch einen ziemlich reichen Inhalt auf verhältnismäßig sehr engem Raume.

10. Schlegel, Lehrbuch der elementaren Mathematik. Wolfenbüttel, Zwißler. Vier Teile: 1. Arithmetik und Kombinatorik, 2. Geometrie, 3. Trigonometrie, 4. Stereometrie und sphärische Trigonometrie.

Ein vielfach eigenartiges Buch. Die Ansichten des Verf., insbesondere über die Behandlung der Geometrie, sind zum Teil im nachstehenden § 43 erwähnt worden.

Der Kürze halber mögen die noch weiter genannten Schriften bloß mit den Titeln und kurzer Inhaltsangabe angeführt werden.

11. Lieber u. v. Lühmann, Leitfaden der Elementarmathematik. Berlin, Simion. Drei Teile: 1. Planimetrie, 2. Arithmetik, 3. Ebene Trigonometrie, Stereometrie, sphärische Trigonometrie.

12. Worpitzky, Elemente der Mathematik. Berlin, Weidmann. Fünf Hefte: 1. Arithmetik, 2. Algebra, Kettenbrüche u. s. w., Trigonometrie, 3. Planimetrie, 4. Planimetrie (Forts.), 5. Stereometrie.

13. Schumann, Lehrbuch der Elementarmathematik, bearb. v. Gantzer. Berlin, Weidmann. Fünf Teile: 1. Lehrb. der Arithmetik und Algebra, 2. Lehrb. d. Planimetrie, 3. Lehrb. d. ebenen Trigonometrie, 4. Lehrb. d. Stereometrie, 5. Lehrb. d. analytischen Geometrie der Ebene.

14. Boymann, Lehrbuch der Mathematik. Düsseldorf, Schwann. Drei Teile: 1. Geometrie der Ebene, besorgt von Werr, 2. Ebene Trigonometrie und Geometrie des Raums, 3. Arithmetik. (In Übereinstimmung mit Heis' Sammlung.)

15. Lehrbücher von Féaux, Paderborn, Schöningh. Die neueren Auflagen besorgt von Luke: Buchstabenrechnung und Algebra, Lehrbuch der elementaren Planimetrie, Ebene Trigonometrie und elementare Stereometrie.

16. Lehrbücher von Spitz, Leipzig, Winter. Lehrb. der allgem. Arithmetik, L. d. ebenen Geometrie, eb. Trigonometrie, sphär. Trigonometrie, Stereometrie, eb. Polygonometrie.

17. Gerlach, Lehrbuch der Mathematik. Dessau, Reißner. Drei Teile: 1. Elemente der Arithmetik, 2. Elemente der Planimetrie, 3. Ebene Trigonometrie, Stereometrie und sphärische Trigonometrie.

Von Schriften, welche nur eine einzelne Disciplin oder mehrere behandeln, mögen die folgenden angeführt werden:

18. Henrici u. Treutlein, Lehrbuch der Elementargeometrie. Leipzig, Teubner. Erster Teil: Gleichheit der planimetrischen Größen. Kongruente Abbildung in der Ebene. Pensum der Tertia. Zweiter Teil: Perspektivische Abbildung in der Ebene. Berechnung der planimetrischen Größen. Pensum der Sekunda. Dritter Teil: Lage und Größe der stereometrischen Gebilde. Pensum der Prima.

Bezweckt die Verschmelzung der Euklidschen und der sog. neueren Geometrie. Vgl. § 43.

19. Müller, Hub., Leitfaden der ebenen Geometrie mit Benutzung neuerer Anschauungsweisen für die Schule. Leipzig, Teubner. 2 Teile.

Derselbe, Leitfaden der Stereometrie mit Benutzung u. s. w. Vgl. § 43.

20. Kruse, Elemente der Geometrie. Erste Abteilung: Geometrie der Ebene. Berlin, Weidmann.

21. Junghans, Lehrbuch der ebenen Geometrie. Zwei Teile. Berlin, Weidmann.

Sehr ausführliches Buch, geeignet zum Selbststudium. Besonders eingehende Behandlung der Konstruktionsaufgaben mit Anleitung zur Auflösung derselben.

22. Schlömilch, Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der Geometrie des Maßes. Leipzig, Teubner. Früher in 2 Bänden, neuerdings in mehreren Heften erscheinend. (Genet. Methode.)

23. Kober, Leitfaden der ebenen Geometrie. Leipzig, Teubner.

Sehr kurz gefaßtes Buch.

24. Fischer, Leitfaden zum Unterricht in der Elementargeometrie. Leipzig, Mauke. I Planimetrie, II Stereometrie, III Ebene und sphärische Trigonometrie.

25. Fischer, Lehrbuch der Geometrie. Freiburg, Herder. 1. Teil: Planimetrie; 2. Teil: Stereometrie.

26. Kommerells Lehrbuch der ebenen Geometrie, bearb. v. Fink, und desselben Lehrbuch der Stereometrie, bearb. v. Hauck. Tübingen, Laupp.

27. Köstler, Leitfaden der ebenen Geometrie. Halle, Nebert.

28. Heger, Leitfaden für den geometrischen Unterricht. Breslau, Trewendt. Vier Teile: 1. Planimetrie, 2. Trigonometrie, 3. Stereometrie, 4. Analytische Geometrie der Ebene.

29. Meyer, Lehrbuch der Geometrie. Leipzig, Koch. 1. Teil: Planimetrie, Herausg. v. Martus. 2. Teil: Stereometrie.

30. Lübsen, Ausführliches Lehrbuch der Elementargeometrie: Ebene und körperliche Geometrie. Derselbe, Ausführliches Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Leipzig, Brandtstetter.

31. Kunze, Lehrbuch der Geometrie. Erster Band: Planimetrie. Jena, Frommann.

32. Müllers J. H. F., Lehrbuch der ebenen Geometrie, herausg. v. Bauer. 3 Teile. Halle, Waisenhaus.

33. Oppel, Leitfaden für den geometrischen Unterricht. Frankfurt a. M., Winter.

34. Schubert, System der Arithmetik und Algebra. Potsdam, Stein.

35. Hochheim, Leitfaden für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra. Berlin, Mittler.

36. Meyer, Elemente der Arithmetik und Algebra. Halle, Schmidt.

§ 23. Die häuslichen Arbeiten.

Schon bei der Besprechung des Zwecks der Lehrbücher (§ 21) ist dargethan worden, daß nicht die Vorbereitung auf den kommenden

Unterricht der häuslichen Arbeit der Schüler zugewiesen werden darf, sondern allein die Wiederholung und Befestigung des in vorhergegangenen Stunden Gelernten. Der mündliche Unterricht ist dazu da, das Verständnis des Lehrstoffs zu erzielen und auch die erste Einübung desselben vorzunehmen, die Hausarbeit tritt deshalb als notwendig hinzu, weil dem Klassenunterricht die Zeit zu ausreichender Wiederholung fehlt, zumal die Zwischenzeit zwischen den einzelnen Stunden lang genug ist, um mangels jedweder Auffrischung das Erinnerungsbild teilweise verblassen zu machen. Auch soll der Schüler lernen, sich ohne unmittelbare Anlehnung an einen Lehrenden, also mehr selbständig mit dem Gegenstande zu beschäftigen. Die Richtigkeit und Ausgiebigkeit dieser Beschäftigung ist selbstverständlich durch den Schulunterricht mittels geeigneter Regelung und nachheriger Kontrole derselben zu sichern.

In ähnlicher Weise haben sich mehrere Direktorenkonferenzen, so die vierte Posensche 1876 und die vierte sächsische 1877 ausgesprochen. Der Referent der ersteren sagte u. a.: „Zweck der häuslichen Arbeiten ist Umfang und Sicherheit des Wissens zu erreichen, namentlich aber erziehlich zu bilden, an Selbstbeherrschung, Fleiß, Zeiteinteilung, Pflichttreue zu gewöhnen“, und der Korreferent bezeichnete die häusliche Arbeit als die zu selbständiger Entwickelung des Schülers notwendige Fortsetzung des Unterrichts in Abwesenheit des leitenden Mitarbeiters.

Die nächste Aufgabe der häuslichen Schülerarbeit ist also, das in der einzelnen Stunde neu Durchgenommene für die nächste Stunde mit Hilfe der Anleitung des Lehrbuches zu repetieren. Daß diese Repetition mit einer schriftlichen Ausarbeitung des betreffenden Lehrstoffs verbunden werde, soll und kann aus schon angeführten Gründen nicht verlangt werden. Es ist zweckmäßig, daß den Schülern am Ende jeder einzelnen Stunde der Umfang des zu wiederholenden Pensums nach Paragraphen und Nummern des Lehrbuches genau angegeben werde. Auch eine Anleitung zur Wiederholung ist, wenigstens anfangs, sehr zu empfehlen. Dieselbe erfolgt, wie alle Lehre, am besten durch das Beispiel: der Lehrer nehme solche Repetitionen einigemale gemeinsam mit den Schülern in der Stunde vor. Die ersten derselben sind, wenn das Lehrbuch in der vorher verlangten Weise eingerichtet ist, sehr einfacher Art, weil der ganze Gedankengang noch ausführlich im Buche angegeben ist. Es handelt sich hier also wesentlich um denkendes Nachlesen und den Versuch, den Gedankengang auch ohne Buch zu wiederholen. Gemeinschaftliches Lesen des betreffenden Abschnitts mit Anhalten nach jedem Satze und Fragen nach dem Inhalte desselben, welcher mit anderen Worten, in weiterer Ausführung oder auch abgekürzt zu wiederholen ist, dann der Versuch Einzelner, jenen Gedankengang zusammenhängend wiederzugeben — das würde etwa als Anleitung zur häuslichen Repetition dienen. Später, wenn an die Stelle der ausgeführten Darstellung des Buches mehr und mehr die andeutende tritt, wird man einige entsprechende „Präparationen“ auf

die Wiederholung in der Stunde etwa nach folgendem Beispiel vornehmen. Das Lehrbuch enthalte (nach Reidt, Elemente, II, S. 18):

„**Lehrsatz 18.** Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise parallel und nach gleichen Richtungen laufen, sind gleich.

Beweis: Ziehe zwei nicht parallele Schenkel bis zum Durchschnittspunkte. Es entsteht ein dritter Winkel, welcher jedem der gegebenen gleich ist. L. 9."

Es sei also dieser Lehrsatz nebst seinem Beweise in heuristisch-analytischer Form in der Stunde durchgenommen und in synthetischer wiederholt worden. Es wird demnach für die nächste Stunde die „Repetition von Lehrsatz 18" aufgegeben. Die Anleitung dazu kann nun dadurch geschehen, daß den Schülern gesagt wird, sie sollen zu Hause zunächst den Lehrsatz 18 aufschlagen und lesen, dann sich nach seiner Angabe eine Figur auf die Schiefertafel oder ein Blatt Papier zeichnen, dieselbe mit Buchstaben versehen, und zu dem Beweise den dritten Winkel suchen und nennen. Man läßt dies alles als Beispiel in der Stunde selbst ausführen, zeigt, wie nun die beiden Sätze $\sphericalangle C = A$, $\sphericalangle C = B$ aufzustellen sind, fragt nach deren Begründung und zeigt, wie derjenige, welcher dieselbe vergessen hat, nur den citierten L. 9 aufzuschlagen und nachzulesen braucht, und endlich, wie dann noch die Behauptung als Schlußfolgerung hinzustellen ist. — Vorgeschrittenere Schüler erhalten den Rat, den Beweis zunächst ohne Hilfe des Buches an der selbstgezeichneten Figur und nötigenfalls durch Fixierung von Zwischengliedern des Gedankengangs mittels kurzer Aufzeichnung zu versuchen, und die Hilfe des Lehrbuches erst in dem Falle in Anspruch zu nehmen, daß sie hierbei an irgend einer Stelle stecken bleiben.

In der nächsten Unterrichtsstunde werden dann Satz und Beweis von den Schülern teils zusammenhängend, teils stückweise einander ergänzend vorgetragen. Ist hierbei noch die Nachhilfe des Lehrers nötig, oder versagen mehrere Schüler ganz, so muß die Arbeit wiederholt werden, bis alle — höchstens einzelne unrettbar Unreife ausgenommen — sich die erforderliche Kenntnis angeeignet haben. Damit ist aber nicht ausgeschlossen, daß namentlich in oberen Klassen auch eine Reihe zusammenhängender Lehren durchgenommen und die Wiederholung derselben in einer späteren Stunde gemeinsam kontroliert wird, falls der Gegenstand dies wünschenswert macht und der Lehrer sicher ist, daß die Schüler ihm nachkommeu können. Auch genügt die einmalige Wiederholung in einer folgenden Stunde nicht zu dauerndem Behalten, vielmehr sind von Zeit zu Zeit besondere, umfassendere Repetitionen vorzunehmen. Dieselben dürfen nicht in allzu kurzen Zwischenräumen stattfinden, nach denen das Bedürfnis der Auffrischung noch nicht vorhanden ist, man darf dieselben aber auch nicht zu lange anstehen lassen, so daß die Schüler in dem groß angewachsenen Pensum nicht wissen, was sie zu Hause repetieren sollen, oder daß sie von der ihnen gestellten

Aufgabe erdrückt werden. Man wiederhole also etwa nach Erledigung je eines kleineren Abschnitts, welcher einen zusammenfassenden Überblick wünschenswert macht, und bezeichne vorher den Schülern die Hauptpunkte desselben, an welche sie sich zu Hause noch einmal erinnern sollen, z. B. eine geringe Anzahl der wichtigsten Lehrsätze, indem man die sich daran schließende Wiederholung der verbindenden Teile, der abgeleiteten Folgerungen und Zusätze u. dgl. für den mündlichen Unterricht vorbehält. Endlich werden größere Repetitionen im Zusammenhang oder mit Heraushebung einzelner Teile ohne häusliche Vorarbeit und daher auch unangekündigt sich nützlich erweisen, um den Schülern wie dem Lehrer ein möglichst sicheres Urteil über den Erfolg ihrer seitherigen Arbeit zu gewähren. Solche Repetitionen werden, namentlich gegen das Ende des Quartals angestellt, zugleich einen wesentlichen Beitrag für die richtige Censur der Leistungen liefern.

Die hiernach erforderliche Hausarbeit der Schüler wird bei richtig geleitetem Unterricht nur sehr wenig Zeit in Anspruch nehmen. Je weiter der Lernende fortschreitet, je mehr er lernt, selbständig Schlußfolgerungen zu ziehen und den Zusammenhang der einzelnen Lehren zu verstehen, desto weniger wird er nötig haben, die Arbeit der Schule durch häuslichen Fleiß zu ergänzen.

Es genügt aber nicht, daß das Verständnis der mathematischen Sätze und das Wissen von denselben zu einem dauernden werde, dieselben bedürfen auch der Anwendung und Übung an der Lösung von Aufgaben. In der Arithmetik ist dieses Bedürfnis schon sehr lange anerkannt, weil hier die Notwendigkeit, zu einer gewissen praktischen Gewandtheit zu gelangen, damit das Gelernte für den weiteren Fortschritt des Unterrichts, wie für den nützlichen Gebrauch zu späteren Berufszwecken Verwertung finden könne, klar vor Augen lag. Viel später erst haben sich die geometrischen Aufgaben, namentlich die konstruierenden, allgemeinen Eingang in die Schulen erzwungen. Zwar kann auch bei ihnen von einem praktischen Nutzen gesprochen werden, indem man sie als Vorschule des geometrischen Zeichnens betrachten kann, allein diese Anwendung lag doch vielen ziemlich fern und erschien als eine sehr einseitige und erläßliche gegenüber den Rechnungsbeispielen der als Grundlage für viel allgemeineren und weitergehenden Gebrauch dienenden Arithmetik. Man geriet sogar vielfach in das Extrem, daß man die letztere mehr als Kunstfertigkeit, wie als Wissenschaft behandelte, und die Nachwirkung davon macht sich bis heute geltend. Ihr allein kann der Ausspruch entstammen, daß man im arithmetischen Unterrichte nur der Aufgabensammlung, und keines Lehrbuches bedürfe.

Der praktische Nutzen, so wenig derselbe auch gering zu schätzen ist, begründet an sich allein aber ebenso wenig die Betonung der Aufgaben auf dem einen, wie die Zurücksetzung derselben auf dem anderen Gebiete. Für den Schulunterricht gewinnen dieselben vielmehr ihre

wesentlichste Bedeutung als wichtige Hilfsmittel zur Erreichung der allgemein bildenden Zwecke desselben. (Vgl. § 5—7.) In dieser Bedeutung sind sie gegenwärtig anerkannt, und durch dieselbe muß auch die Art ihrer Behandlung bestimmt werden.

Da die letztere zugleich von der Beschaffenheit des einzelnen Übungsgebietes abhängig ist, so kann dieselbe erst bei der Besprechung der einzelnen Unterrichtsdisciplinen erörtert werden; an der jetzigen Stelle haben wir es mit der Frage zu thun, ob und wieweit die Auflösung von Aufgaben der häuslichen Arbeit der Schüler zuzuweisen sei.

Dieselben Gründe, welche bei der Durchnahme des Systems die Heranziehung des häuslichen Fleißes erforderlich erscheinen ließen, finden auch hier Anwendung, sie treten aber zugleich in verstärktem Maße auf. Denn einmal bedarf die Einübung mancher Lehren bis zu erlangter Fertigkeit in der Ausführung meist einer größeren Zeitmenge, als dem mündlichen Unterricht zu Gebote steht; man denke z. B. an den Gebrauch der Logarithmentafeln, die Auflösung von Gleichungen oder die Zahlenbeispiele zu den trigonometrischen Fundamentalaufgaben. Sodann bedarf diese Einübung zum Teil nicht der unausgesetzten Hilfe und unmittelbaren Überwachung des Lehrers, und es wäre Schade um die kostbare Zeit der Schule, wenn dieselbe zu einer Thätigkeit verwendet würde, bei der die Mitarbeit des Lehrers entbehrlich ist. Endlich liegt gerade der besondere Wert der Übungsaufgaben darin, daß sie die beste Gelegenheit bieten, die Schüler schon von früh an allmählich an selbständiges Arbeiten zu gewöhnen.

Man darf jedoch nicht den Fehler begehen, diese Selbständigkeit als bereits voll ausgebildet von vorneherein zu verlangen, noch weniger darf man dieselbe bei der Masse der Schüler mit einer gewissen Erfindungsgabe verwechseln, von welcher das Aufsuchen eigener, neuer Wege zur Behandlung und Lösung von Problemen erwartet wird. Einem guten Unterricht wird es zwar hier und da gelingen, begabtere Geister bis zum Schlusse ihrer Schülerlaufbahn auch zu solcher Befähigung zu bringen, als Regel kann dies jedoch nicht angesehen werden. Der Lehrer hat also nicht bloß Aufgaben zu stellen, sondern er hat auch eine methodische Anleitung für ihre Behandlung zu geben und dieselbe an einer reichlichen Anzahl bestimmter Einzelbeispiele zu erläutern. Für die häusliche Arbeit ist dann zwar nicht bloß die Wiederholung der im Unterricht behandelten Aufgaben, sondern auch die selbständige Lösung neuer zu verlangen, allein die letzteren müssen so vorbereitet sein, daß jeder nicht ganz nachlässige Schüler den Weg zu ihrer Behandlung sicher vor sich sehen und nicht in Ermangelung eines erforderlichen guten Gedankens oder Einfalls genötigt sein muß, fremde Hilfe in Anspruch zu nehmen. Die selbständige Thätigkeit des Durchschnittsschülers kann niemals in der Aufstellung eigener, neuer Gedanken, sondern nur in der Anwendung des Gelernten auf einen

anderen Fall bestehen. Wir verlangen also, daß jede für die Hausarbeit zu stellende Aufgabe keinerlei Schwierigkeiten enthalten soll, zu deren sicherer Überwindung der Unterricht keine Anleitung gegeben hat. Da aber eine und dieselbe Aufgabe sich auf verschiedenen Wegen lösen läßt, so werden für die Schule diejenigen die besten sein, welche daneben auch den befähigteren Talenten die Möglichkeit gewähren, mit Aufbietung von mehr oder minder großer geistiger Kraft ihre eigenen Wege zu suchen.

Wir unterscheiden nun zwei Arten von Aufgaben. Die erste derselben dient zur unmittelbaren Erläuterung und Einübung eines Satzes oder einer Satzgruppe, ähnlich wie im sprachlichen Unterricht die Übersetzungsbeispiele, welche den einzelnen Regeln der Grammatik zur Erläuterung beigegeben werden. Die andere Art tritt mit selbständiger Berechtigung auf, umfaßt ganze Systeme von Aufgaben und erfordert zur Lösung die Anwendung eines größeren Wissensgebietes; ihre Behandlung würde, um den vorstehenden Vergleich fortzusetzen, der zusammenhängenden Lektüre der Schriftsteller entsprechen.

Zu der ersten Art gehören zunächst die einfachen Beispiele, welche die Aufgabensammlungen zu den einzelnen, in Formeln dargestellten Gesetzen der Arithmetik zu bieten pflegen, ebenso die Zahlenbeispiele zur Einübung der trigonometrischen Fundamentalaufgaben, und in der Geometrie die Beweise von Lehrsätzen, welche sich unmittelbar an im Unterricht behandelte Abschnitte anschließen, ferner Berechnungs- und die einfachsten Konstruktionsaufgaben, welche man wohl als mittels „Analysis durch Lehrsätze" lösbar bezeichnet, weil sich ihre Auflösung unmittelbar aus bekannten Lehrsätzen ergiebt.

So kann man z. B. dem Satze von der Summe der Nebenwinkel unmittelbar die folgenden Fragen und Aufgaben anschließen: Zwei Nebenwinkel seien gleich groß, wie groß ist jeder? — Zu welcher Art von Winkeln gehört der größere, zu welcher der kleinere von zwei ungleichen Nebenwinkeln? — Was kann man von den Nebenwinkeln zweier gleichen Winkel behaupten? — Welcher von zwei ungleichen Winkeln hat den größeren Nebenwinkel? — Was weiß man von zwei Winkeln, deren Nebenwinkel gleich sind? — Was von Winkeln, deren Nebenwinkel ungleich sind? — Ein Winkel α sei in Graden, bezw. Minuten und Sekunden gegeben; man soll seinen Nebenwinkel berechnen. Dazu verschiedene Zahlenbeispiele. — Zu einem gegebenen Winkel den Nebenwinkel zu zeichnen. — Auf wieviele Arten läßt sich diese Aufgabe lösen? Wieviele Nebenwinkel hat also ein gegebener Winkel?*) Eine Auswahl derartiger Aufgaben aus allen Teilen der Planimetrie, nach Satzgruppen geordnet, enthält des Verf. Schriftchen: „Planimetrische Aufgaben, Breslau, Ed. Trewendt, Erster Teil". — Das vorstehende Beispiel reicht hin, um zu zeigen, wie durch solchen

*) Nach des Verf. Elemente der Mathematik. Berlin, G. Grote, Teil 2.

Übungsstoff schon von dem ersten Anfang an die einzelnen Sätze erläutert, in ihrer Bedeutung und Anwendung klar gestellt und auch durch hinüberleitende Übergänge unter einander verbunden werden.

Es liegt in der Natur und dem Zwecke derartiger Aufgaben, daß dieselben in unmittelbarem Anschluß an die einzelnen Sätze oder Satzgruppen zu behandeln sind, und es ist dieses Anschlusses wegen wünschenswert, daß das Lehrbuch nach dieser Seite auch die Aufgabensammlung, und zwar in einer seiner eigenen Gliederung entsprechenden Anordnung nach den einzelnen Paragraphen enthalte, oder daß doch die etwa gebrauchte besondere Aufgabensammlung mit genauester Rücksicht auf das gleichzeitig benutzte Lehrbuch bearbeitet sei. Der letztere Fall wird insbesondere bei den arithmetischen Aufgaben zu beachten sein. — Die Behandlung dieser Aufgaben geschieht zum Teil im mündlichen Unterricht, zum anderen Teil bietet sie vortreffliches Material für die häusliche Arbeit. Hier geht sie mit der Repetition der gelernten Sätze Hand in Hand und bildet ein Stück der von Stunde zu Stunde vorzunehmenden Arbeit. Bei solchen Rechnungsaufgaben, welche nicht ganz und gar im Kopfe gelöst werden können, wird man verlangen dürfen, daß der Schüler nicht bloß die Resultate, sondern auch die schriftlichen Ausrechnungen derselben in die Stunde mitbringe, damit der Lehrer Gelegenheit habe, dieselben durch Nachsehen, soweit dasselbe erforderlich erscheint, zu kontrolieren. Bei allen übrigen derartigen Aufgaben ist die schriftliche Ausarbeitung, so zweckmäßig dieselbe auch vielfach sein würde, im allgemeinen nicht zu verlangen, um Überbürdung mit Schreibarbeit zu vermeiden. Es muß genügen, daß die einzelnen Schüler sich bei der in jedem Fall in der Stunde vorzunehmenden Kontrole imstande zeigen, die ganze Auflösung oder die Begründung der gegebenen Antwort mündlich vorzutragen.

§ 24. Fortsetzung.

Die Aufgaben der zweiten Art bedürfen dagegen einer selbständigen Behandlung, die Anleitung zu ihrer Auflösung und die Ausführung der letzteren an den einzelnen Beispielen muß besondere Abschnitte des Unterrichts bilden, welche an geeigneten Stellen zwischen den Aufbau des Systems einzuschalten sind. Hierher gehören in der Arithmetik die schwierigeren Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten, sowie alle übrigen Gleichungen, namentlich aber die eingekleideten Aufgaben zu denselben, in der Geometrie die größeren Systeme von Konstruktionsaufgaben und die komplizierteren, mit Gleichungen auszuführenden Berechnungen.

Sache des mündlichen Unterrichts ist es hier zunächst, wie schon bemerkt, den Schülern eine Anleitung zur Behandlung der Aufgaben zu geben, welche sie in den Stand setzt, die Wege zur Auflösung mit Sicherheit finden und gehen zu können. Früher beschränkte man sich

in dieser Beziehung auf die gemeinschaftliche Bearbeitung einer Anzahl von Aufgaben in der Stunde, welche als Beispiele für die anderen dienen sollten, und entzog sich einer methodisch-systematischen Anleitung durch die Erklärung, daß eine solche bei der großen Menge und Verschiedenartigkeit der Aufgaben nicht möglich sei, und daß deshalb die Aufsuchung des geeigneten Weges im einzelnen Falle dem Scharfsinne des Arbeitenden überlassen werden müsse. Diese Behauptung ist irrig; man hat in neuerer Zeit für die wichtigsten Aufgabensysteme recht vortreffliche allgemeine Anleitungen aufgestellt, und jedenfalls gehören Probleme von solcher Schwierigkeit, daß ihre Auflösung einen besonders findigen Kopf verlangt, nicht in die Schule. Hier müssen unbedingt Methoden gelehrt werden, wenn man die große Mehrzahl der Schüler nicht dahin bringen will, daß sie statt zu arbeiten „Federkauen" und dann sich zur Unselbständigkeit gedrängt sehen.

Selbstverständlich muß die allgemeine Anleitung auch im Unterricht an ausgeführten Beispielen erläutert und ihre Anwendung eingeübt werden, und entsprechend muß auch zu Hause eine Wiederholung und weitere Übung stattfinden. Da während der Durchnahme dieser Aufgaben im Unterricht der weitere Aufbau des Systems ruht, so tritt diese häusliche Beschäftigung einfach an die Stelle der sonst stattfindenden Wiederholung der Lehrsätze und Beweise, sowie der Lösung jener an letztere sich anschließenden Spezialaufgaben. In welchem Umfange dieselbe in Anspruch genommen werden darf, wird hier wie dort für jede einzelne Klasse durch den allgemeinen Lehrplan der Schule zu ordnen sein. Eine bestimmte Anzahl für das Haus von Stunde zu Stunde zu stellender Aufgaben läßt sich selbstverständlich wegen der großen Verschiedenheit derselben nach Ausdehnung und Schwierigkeit nicht festsetzen. Der Lehrer bedarf hierbei der Erfahrung, um sicher zu gehen, daß er seine Schüler weder überbürde, noch auch ihnen zu wenig Kraftanstrengung zumute. Am sichersten wird er in dieser Beziehung immer gehen, wenn er die Schüler auffordert, sich die zur Ausarbeitung der Hausaufgaben gebrauchte Zeit zu notieren, und sich das Resultat hin und wieder sagen läßt. Er wird dabei selbstverständlich sehr verschiedene Angaben erhalten, im Durchschnitt aber zu einem richtigen Urteil befähigt werden. Das Streben träger Schüler, die Zeit zu übertreiben, um kleinere Aufgaben zu erhalten, wird meist durch den Stolz anderer, in kurzer Zeit etwas leisten zu können, kompensiert werden, auch wird der Lehrer ja seine Schüler soweit kennen, um zu wissen, welchen er nicht trauen kann. — In der Regel wird der Anfänger im Unterrichten bei solchen Proben die Erfahrung machen, daß die Schüler erstaunlich viel langsamer arbeiten, als er vorausgesetzt hat, indem er den Maßstab nur aus seiner eigenen Stellung zu der Aufgabe nahm. Auch darf er das Pensum der häuslichen Arbeit niemals nach der Leistungsfähigkeit der besten Schüler der Klasse abmessen, sondern muß dasselbe den Schwächeren anpassen. Damit aber

nicht auf diese Weise das Interesse der besseren erlahme und ihre Fortschritte entgegen ihrer Leistungsfähigkeit verlangsamt werden, empfiehlt es sich vielleicht, eine größere Menge von Aufgaben zu stellen, und davon ein Minimum zu bezeichnen, welches jeder behandeln muß. Ist zu fürchten, daß der Ehrgeiz hierbei schwächere, aber fleißige Schüler dazu treiben könnte, sich selbst zu überbürden, so kann man auch eine Anzahl von Aufgaben zur bestimmten Auswahl stellen, wobei die schwächeren Schüler sich die (als solche besonders bezeichneten) leichteren und kürzeren, begabte aber die schwierigeren wählen werden. Auf jeden Fall gebe man für das Haus lieber etwas zu wenig, als zu viel auf, denn der Schüler soll hinreichende Zeit haben, sich in seine Aufgabe zu vertiefen und dieselbe gründlich, mit Lust und Liebe zu bearbeiten. Nur in diesem Falle wird der Zweck derselben erreicht, nicht aber wenn auch der fleißige Schüler genötigt ist, aus Mangel an Zeit sich abzuhasten und seine Arbeit flüchtig zu machen.

Auch bei diesen Hausaufgaben tritt die Frage auf, ob dieselben schriftlich ausgearbeitet und so in der nächsten Stunde vorgelegt werden sollen. Die richtige Antwort dürfte hier wieder die sein, daß alles das, was der Schüler ohne Niederschreiben machen kann, auch nicht geschrieben zu werden braucht; selbstverständlich muß er bereit sein, dieses Können in der nächsten Stunde zu bewähren. Alles aber, was der Natur der Sache nach oder wegen der schwachen Kräfte des Einzelnen nur schriftlich ausgearbeitet werden kann, das soll auch in dieser Ausarbeitung mit in die Stunde gebracht und auf Verlangen zur Kontrole vorgezeigt werden. Hierher gehören z. B. längere Ausrechnungen, während bei Konstruktionsaufgaben häufig eine sog. „redende" Figur genügen wird, d. h. eine solche, in der die Aufeinanderfolge der einzelnen Operationen durch Striche oder andere Zeichen u. dgl. m. angedeutet ist.

Daß diese schriftlichen Ausarbeitungen hinreichend sauber und in gehöriger Ordnung verlangt werden müssen, ist selbstverständlich, doch wird sich dies durch richtige Gewöhnung von früh auf erreichen lassen, ohne daß es nötig wird, eine eigentliche, sogenannte Reinschrift, also ein doppeltes Schreiben der Arbeit, zu fordern.

Der Schüler soll aber auch lernen, eine Aufgabe in vollständiger Ausführung schriftlich auszuarbeiten, und diese Forderung wird erfüllt durch sogenannte Heft- oder Terminarbeiten, welche nach regelmäßigen Zwischenzeiten angefertigt und dem Lehrer vorgelegt werden. Damit ein dauernder Überblick über diese Arbeiten möglich ist, sind dieselben in ein besonderes mathematisches Heft einzutragen, welches mindestens bis zum Schlusse des Schuljahrs beibehalten oder aufbewahrt wird.

Diese Heftaufgaben haben weniger den Zweck, einen Fortschritt der Kenntnisse zu vermitteln, oder auch zur Prüfung der Leistungsfähigkeit der Schüler zu dienen, als dieselben an die richtige Form der

schriftlichen mathematischen Darstellungsweise zu gewöhnen. Für den Fortschritt der Kenntnisse sind die viel zahlreicheren und rascher wechselnden Übungen in den Stunden und die im vorhergehenden besprochenen Hausaufgaben von so weit überwiegender Bedeutung, daß neben ihnen die selteneren Heftarbeiten nicht wesentlich ins Gewicht fallen können. Die letzteren sollen also namentlich die Präcision des sprachlichen Ausdrucks, die richtige Schreibweise der Formeln und Rechnungen, die exakte Ausführung der Figuren und die Herstellung eines thunlichst ansprechenden Äußeren der Arbeit üben. Jedermann weiß, daß bei dem mündlichen Vortrag viel leichter eine sprachliche Ungenauigkeit durchschlüpft, als dies bei dem durch die Schrift fixierten Worte möglich ist, und daß nicht jeder, der erträglich zu reden weiß, deshalb auch schon imstande zu sein braucht, in gutem Stil zu schreiben. Beides geht allerdings Hand in Hand, bedarf aber in der Mathematik ebenso gut einer besonderen Übung, wie im deutschen Unterricht, in welchem niemand behaupten wird, daß der Aufsatz durch mündliche Vorträge ersetzt werden könne. Der Schreibende hat in der zu behandelnden Aufgabe meist ein längeres Gebiet zur selbständigen sprachlichen Bearbeitung vor sich, als derjenige, welcher im Unterricht mündlich vielleicht nur einen Teil des Ganzen vorträgt, weil die Notwendigkeit, die ganze Klasse zur Mitarbeit heranzuziehen, zu einem Wechsel der Person des Vortragenden oder zu Zwischenreden einzelner aufgerufener Mitschüler veranlaßt; er hat die Zeit, sich jeden Satz und jede Gedankenverbindung reiflicher zu überlegen, und dabei steht ihm die Einhilfe und Korrektur des Lehrers bei Fehlern nicht unmittelbar zur Seite. Auch das ist von Wichtigkeit, daß über den in der schriftlichen Arbeit gemachten und vom Lehrer am Rande verbesserten Verstoß gegen die Präcision der mathematischen Ausdrucksweise weniger flüchtig hinweggegangen werden kann, als im mündlichen Unterricht; Fehler und Verbesserung stehen sichtbar vor den Augen, werden mit größerem Interesse von dem Verfasser der Arbeit betrachtet und da, wo bekannte Fehler gemacht und bloß angestrichen sind, wird durch die Nötigung des Schülers, diese Fehler selbst, und zwar ebenfalls schriftlich zu verbessern, denselben eine nachdrücklichere Beachtung gesichert.

Deshalb sind alle diese Arbeiten vom Lehrer regelmäßig und bis ins Einzelne durchzusehen und zu korrigieren. Über die leidige Korrekturlast wird freilich viel geklagt, doch ist derselben nicht abzuhelfen. Sehr häufig brauchen die Arbeiten übrigens nicht angefertigt zu werden; der oben angegebene Zweck läßt sich erreichen, ohne daß man durch eine sehr große Zahl solcher eine größere Zeit erfordernder Leistungen die Schüler und den Lehrer überanstrengt. In den obersten Klassen dürften vierwöchentliche, in den mittleren vierzehntägige bis dreiwöchentliche Termine vollkommen ausreichen. Daß eine Verbesserung der Fehler durch die Schüler ausgeführt und vom Lehrer kontroliert werde, ist unbedingt zu verlangen, wenn auch die Mühe dadurch sehr vermehrt

werden kann; ohne diese Korrektur geht, wie oben gezeigt, ein großer Teil des Nutzens solcher Arbeiten verloren. Übrigens sind die eingehenden Korrekturen der Heftarbeiten für den angehenden Lehrer selbst sehr nützlich, er lernt durch die Fehler, die er seine Schüler machen sieht. Mit den Jahren arbeitet man sich dann allmählich in eine gewisse Korrekturtechnik hinein, man kennt erfahrungsmäßig die Fehler, welche häufiger gemacht werden, der Blick schärft sich für dieselben, und das Korrigieren geht rascher von statten.

Daß jeder Arbeit ein Gesamturteil über dieselbe beigefügt werde, mindestens ein das Verhältnis der Leistung zu dem erstrebten Ziele bezeichnendes Prädikat, das ist der Lehrer dem Schüler schuldig. Auf die Semester- oder Quartalscensur aber sollen diese Prädikate keinen hervorragenden, sondern nur einen ganz geringen Einfluß erhalten. Die mathematischen Arbeiten sind hier nicht in gleicher Weise, wie die sprachlichen zu behandeln, welche letzteren ja eine wesentliche Rolle in betreff der Kenntnisse und der Fortschritte in den Leistungen spielen, während, wie oben bemerkt, die ersteren nur einen äußeren, formalen Zweck haben. — Hierzu kommt, daß die Geneigtheit vieler Schüler zu unselbständiger Anfertigung ihrer schriftlichen Arbeiten nicht auszurotten ist, weil es zu natürlich ist, daß der Schüler, welcher eine häusliche Aufgabe nicht zu lösen versteht oder wenigstens Schwierigkeiten findet, bereit stehende Hilfe benutzt, und weil die Hoffnung, nicht entdeckt zu werden, immer der Furcht vor Bestrafung bei dem Faulen entgegenwirken wird. Ob der sachliche Gedankengang bei der außerhalb der Schule angefertigten schriftlichen mathematischen Arbeit von dem Schreiber derselben selbst aufgestellt, oder ob er ihm von einem anderen mitgeteilt worden, wird sich in sehr vielen Fällen nicht nachweisen lassen, wenn nur die sprachliche Form selbständig gegeben wurde. Beschränkt man den Zweck der Arbeiten im wesentlichen auf die letztere, zeigt es sich mittels derselben, daß der Schüler durch die fremde Hilfe den Gedankengang sich geistig angeeignet hat, und kann er denselben auf Verlangen selbständig wiederholen, so ist die Sache auch nicht zu schlimm. Unrecht aber würde es sein, der bloßen Formgewandtheit eines geistig Unselbständigen — gegenüber einer etwaigen Schwäche eines anderen Schülers, der aber in der Hauptsache, dem eigenen Denken, Gutes leistet — einen erheblichen Einfluß auf die Censur oder gar auf das Urteil über die Versetzungsreife zuzugestehen. Mit berücksichtigt muß sie selbstverständlich werden; die Prädikate der schriftlichen mathematischen Arbeiten aber dem aus dem mündlichen Unterricht geschöpften Urteil gleich oder gar vorzustellen, wie es wohl hier und da rein philologisch gebildete Ordinarien verlangen, würde ganz verkehrt sein.

Man wird übrigens der Unselbständigkeit der Arbeiten durch kein Mittel besser entgegenwirken können, als durch die Befolgung der früher gegebenen Vorschrift, daß keine Aufgabe gestellt werden darf, welche nicht durch den Unterricht gehörig vorbereitet ist. Geschieht das

letztere nicht, so kann der Lehrer zum Mitschuldigen an einem Täuschungsversuch werden, weil er mehr fordert, als der betreffende Schüler bei dem besten Willen leisten kann. Das letztere einzugestehen wird gerade besseren Schülern schwer fallen; auf diese Weise kann der Unterricht, welcher helfen soll, die sittliche Kraft des Schülers zu heben, derselben entgegenwirken. — Selbstverständlich ist die gehörige Vorbereitung der Aufgaben nicht gleichbedeutend mit dem Verzicht auf eigene Kraftanstrengung der Schüler. Auch ist unter derselben nicht eine vorhergehende besondere Besprechung der zur Auflösung führenden Wege zu verstehen, sondern die Aufgaben sollen sich eng an den Unterricht anschließen, derart daß durch denselben die allgemeine Methode und die im einzelnen zu gebrauchenden Hilfsmittel bekannt geworden sind und nirgends verlangt wird, ganz eigene neue Wege zu erfinden. Aufgaben derselben Kategorie, welche gleichzeitig im Unterricht behandelt wird, und entsprechende Repetitionsaufgaben aus früheren Gebieten werden überall hinreichend vorbereiteten Stoff liefern. Dadurch ist auch keineswegs ausgeschlossen, daß einzelne denkende Köpfe ihre eigenen Wege suchen, und etwas lobende Anerkennung bewiesener geistiger Selbständigkeit wird die dazu Befähigten neben dem ihnen meist innewohnenden eigenen Interesse leicht in einer Weise dazu aneifern können, welche allen billigen Ansprüchen Entsprechendes zu Tage fördert. Von der Gesamtheit aber kann eine solche Selbständigkeit erfahrungsmäßig auch in der Prima nicht verlangt oder erwartet werden.

Die Rückgabe der korrigierten Arbeiten wird zweckmäßig mit einer mündlichen Kritik verbunden, welche etwa vorgekommene Irrwege und Fehler bespricht, die angewendeten Methoden in betreff ihrer Zweckmäßigkeit vergleicht und andere zweckdienliche Bemerkungen hinzufügt, auch Lob und Tadel, wo es nötig erscheint, begründet. Man vermeide hierbei Zeitverlust infolge Eingehens auf Fehler, welche die Schüler für sich einzusehen oder aus der geschriebenen Korrektur des Lehrers zu erkennen vermögen, und halte es nicht für geboten, die Arbeit jedes einzelnen Schülers mündlich vorzunehmen. Durch geeignetes gruppenweises Zusammenfassen einander ähnlicher Arbeiten, überhaupt eine vorwiegend allgemeine Besprechung, welcher die Einzelheiten, wo sie nötig sind, eingefügt werden, wird man vielmehr verhüten, daß den Unterrichtsstunden durch die in Rede stehenden Arbeiten eine größere Schädigung an Zeit erwachse.

Von diesen häuslichen Heftaufgaben sind die Extemporalien zu unterscheiden; dieselben haben vorwiegend andere Zwecke. Denn bei ihnen steht nicht, wie bei jenen, die Auswahl und Ausdehnung der anzuwendenden Zeit frei, die ruhige und sichere Erwägung der Gedanken und die Abmessung des Satzbaues ist daher nicht in gleicher Weise gewährleistet, und selbst dem Äußeren der Arbeit kann bei drängender Zeit für die Erledigung einer vielleicht nicht rasch genug gefundenen Auflösung nicht die gleiche Sorgfalt zugewandt werden. Die Extem-

poralien sind hiernach mehr Übungen im raschen Arbeiten innerhalb einer bestimmten Arbeitszeit, durch sie wird bei zugleich mehr gewährleisteter Selbständigkeit die Leistungsfähigkeit und namentlich die Schlagfertigkeit der Schüler erprobt. Sie geben daher auch einen wichtigeren Beitrag zur Beurteilung und Censierung der Schüler, als die häuslichen Arbeiten. Doch sind auch sie nach dieser Seite nur mit großer Vorsicht zu verwenden. Denn einmal ist das Absehen auch bei ihnen keineswegs ausgeschlossen; ein gutes Auge liest unter geeigneten Sitzverhältnissen die ganze Arbeit des Nachbars oder des Vordermanns, ohne daß der beobachtende Lehrer es mit Sicherheit bemerken kann, ja die Verführung zum Absehen ist hier, wo die Hilfe nicht erst aufgesucht zu werden braucht, sondern gewissermaßen dem Arbeitenden gleich zur Seite gesetzt ist, entschieden größer, und sie wächst noch, wenn der Schüler weiß, daß dem Ausfall der Extemporalien ein besonders großes Gewicht bei der Censur und der Versetzung beigelegt wird. Das unselbständige Arbeiten ist bei den Extemporalien nur mehr erschwert durch die Anwesenheit des Lehrers, die Beschränkung auf das Absehen von den bestimmten in der Nähe sitzenden Mitschülern und die leichtere Möglichkeit, es in den Arbeiten nachzuweisen. Sodann kann ein sonst recht guter Schüler, der aber sehr langsam arbeitet, auf Grund des Ausfalls der Extemporalien gegen einen gewandten, aber viel weniger kenntnisreichen Mitschüler allzusehr in Nachteil geraten, und auch die Mitwirkung des Glücks bei der Wahl der Themen kann das Urteil unrichtig machen. Dies gilt namentlich von solchen Extemporalien, bei welchen die Lösung einer zusammenhängenden Aufgabe gefordert wird, die Schüler während einer oder mehrerer Stunden still für sich arbeiten und der Lehrer dabei im wesentlichen nur die Rolle des Aufsichtführenden spielt. Etwas anders verhält es sich, wenn der Lehrer Reihen von kurzen Fragen oder Aufgaben einzeln nach einander diktiert, welche dann ebenso einzeln von den Schülern schriftlich beantwortet oder gelöst werden. Hier muß jede Frage beantwortet sein, ehe die folgende gestellt wird, und es fehlt meist die Zeit, um fremde Hilfe zu suchen. Derartige Extemporalien dienen vorzugsweise zur Repetition des durchgenommenen Pensums und zur Prüfung, ob der Inhalt desselben den Schülern sofort zu Gebote steht. Sie können also nach Vollendung eines Abschnittes behufs einer angesagten Repetition desselben geschrieben werden, so daß die Schüler sich darauf präparieren können. Man kann aber auch solche Extemporalien von Zeit zu Zeit ganz unverhofft stattfinden lassen, um die Stetigkeit des Fleißes zu prüfen und anzuregen. — Man vergesse jedoch nie, daß der mündliche Unterricht für die Mathematik immer der wichtigste ist, indem durch ihn der Fortschritt erzielt wird, während die schriftlichen Arbeiten nur der Befestigung des Gelernten, der Übung in der richtigen Formgebung und der Kontrole dienen. Niemals dürfen also die letzteren so ausgedehnt werden, daß der mündliche Unterricht dadurch eine ihn schädigende Beeinträchtigung

erfährt. Selbstverständlich ist auch, daß die Extemporalien vom Lehrer ebenso sorgfältig wie die häuslichen Heftarbeiten durchgesehen und censiert werden müssen.

An manchen Schulen besteht die Einrichtung sogenannter Arbeitstage, an welchen während der Schulzeit größere schriftliche Ausarbeitungen verfertigt werden. In diesen und ähnlichen Fällen empfiehlt es sich, solchen Schülern der obersten Klassen, welche etwa ein besonderes Interesse und Begabung für die Mathematik zeigen, Gelegenheit zu selbständiger weitergehender Übung zu bieten, indem man denselben größere Probleme vorlegt, die eine zusammenhängende Reihe von Aufgaben umfassen und ein bestimmtes, abgeschlossenes Untersuchungsgebiet behandeln. Eine Anleitung zur Behandlung wird auch hier nicht fehlen dürfen, welche die verschiedenen Richtungen andeutet, nach denen dieses Gebiet zu durchforschen ist, und davor schützt, daß wichtige Seiten nicht bemerkt und daher übergangen werden. Als Hilfsmittel hierzu kann u. a. benutzt werden: „Erler, Aufgaben a. d. Mathematik für größere Vierteljahrsarbeiten der Primaner, Jena, Frommann. Auch die Anhänge und Exkurse, welche manchen Lehrbüchern angefügt sind, können hierbei zweckentsprechende Verwertung finden.

II. Teil.

Die einzelnen mathematischen Disciplinen.

---

4. Kapitel.

Arithmetik und Rechnen.

a) Der Rechenunterricht.

§ 25.

Die Aufgabe des Rechenunterrichts an den höheren Schulen ist eine dreifache, derselbe soll 1) durch die ihm eigentümlichen formalen Bildungselemente als Mittel zur Ausbildung des jugendlichen Geistes dienen, 2) dem Schüler die für das bürgerliche Leben nötige Fertigkeit und Sicherheit aneignen, 3) eine Vorbereitung für den mathematischen Unterricht gewähren*). Die beiden ersten Aufgaben hat derselbe mit demjenigen der Volksschule gemeinsam, die letzte ist ihm

---

*) Verhandl. d. XIII. Westfäl. Direktorenkonferenz 1857.

eigentümlich. Es folgt daraus, daß die zahlreichen, zum Teil viel Vortreffliches enthaltenden Anleitungen zur Erteilung dieses Unterrichtes in der Volksschule für unsere Zwecke nicht durchweg hinreichen können, und daß das Gleiche mit den betreffenden, für den Gebrauch der Schüler bestimmten Rechenbüchern der Fall ist.

Auch die Frage, wer den Rechenunterricht in Sexta, Quinta und allenfalls Quarta erteilen soll, wird durch jene dritte Aufgabe bedingt. Es ist vielfach zur Regel geworden, mit demselben einen Elementarlehrer zu betrauen, und man hat als Grund dafür nicht die geringeren Besoldungskosten, welche die Anstellung eines solchen an höheren Schulen verursacht, auch nicht die Notwendigkeit angegeben, einem Lehrer der technischen Fächer, wie Singen und Zeichnen, zu seiner Vollbeschäftigung noch eine Anzahl anderer Stunden zuweisen zu müssen, für welche derselbe allenfalls befähigt sein könnte, sondern es ist die bessere didaktische Vorbildung, welche derselbe sich im Seminar im Gegensatz zu den Kandidaten des höheren Schulamts angeeignet habe, als maßgebend bezeichnet worden. Wahrlich, ein Armutszeugnis für die Vorbereitung der mathematischen Lehrer zu ihrem speziellen Beruf, zu dem allerdings früher manchmal nicht ungegründete Veranlassung gegeben sein mag! Es gab eine Zeit, in der es nichts Außergewöhnliches war, daß der Lehrer der Mathematik über seiner Beschäftigung mit allgemeinen Formeln die Fertigkeit im praktischen Rechnen mit Ziffern verloren hatte, und in seinen Rechnungen an der Wandtafel sich fast regelmäßig zum Ergötzen seiner Schüler verrechnete. In solchen Fällen war allerdings ein Elementarlehrer für den Rechenunterricht der unteren Klassen besser am Platze, als der gelehrte Mathematiker, auch wenn jener durch seinen Bildungsgang an eine Behandlungsweise des Faches gewöhnt war, welche den Zwecken des späteren Unterrichts nicht entsprach. Heutzutage dürfen und sollen solche Zustände nicht mehr vorkommen; es ist unabweisbare Pflicht des Lehrers der Mathematik, sich nicht nur eine besondere Fertigkeit in sicherem und gewandtem Rechnen zu erhalten oder zu erwerben, sondern auch in dem einsichtsvollen wissenschaftlichen Verständnis der Methodik des Unterrichts den hier und da in einseitiger Richtung befangenen Elementarlehrer zu übertreffen.

Wir wollen mit dieser Bemerkung dem Stande unserer Volksschullehrer in keiner Weise zu nahe treten. Es ist durchaus nicht ausgeschlossen, daß ein solcher durch eine über die Ziele seiner besonderen Seminarstudien hinausgehende Beschäftigung mit wissenschaftlicher Mathematik sich die Weite des Blickes erwerbe, welche ihn befähigt, dem Unterricht höherer Klassen in ausgezeichneter Weise vorzuarbeiten. Aber man kann nicht erwarten, daß dies überall der Fall sein werde, und das Naturgemäße ist jedenfalls, daß ein Vorbereitungskursus für einen späteren Unterricht von einem Lehrer erteilt wird, der neben gediegener didaktischer Vorbildung auch die wissenschaftliche Befähigung zu diesem späteren Unterricht erworben hat und deshalb genau weiß, welche An-

sprüche der letztere an die Vorbereitung stellen muß. So sagt auch Schrader (Erziehungs- und Unterrichtslehre): „Dem mathematischen Unterrichte geht in den nnteren Klassen das Rechnen voraus; es ist von größter Wichtigkeit, daß dasselbe von einem Sachverständigen nach rationeller Methode gelehrt werde." Sachverständig ist aber hier nicht derjenige, der es zwar versteht, praktische Rechenfertigkeit auf Grund denkender Anwendung der Regeln zu erzielen, aber die Forderungen des weiterschreitenden Unterrichts nicht auf Grund hinreichender eigener Beschäftigung und Erfahrung mit demselben kennt. Die studierten Mathematiker sollen sich deshalb auch nicht für zu gut halten, um den Rechenunterricht in den unteren Klassen zu übernehmen.

Die erste der oben angeführten Aufgaben des Rechenunterrichts, der formale Zweck, welchen derselbe wie jeder Unterricht hat, fordert die Beseitigung alles mechanischen Regelwesens. Es gab eine Zeit, und sie ist vielleicht noch nicht überall vorbei, wo man in Lehrbüchern und in der Schule Regeln finden konnte, die etwa anfingen: Man mache einen Strich von oben nach unten, setze auf die linke Seite die und die Zahlen, auf die rechte die anderen, streiche auf beiden Seiten vorkommende gleiche Zahlen aus, u. s. w. Warum man so rechne, aus welchen Gründen das Verfahren zum richtigen Resultat führen müsse, das zu erläutern war Nebensache; die Schüler lernten nach den mechanischen Regeln ohne viel Kopfzerbrechen rasch und sicher die Operationen ausführen, und die mechanische Geschicklichkeit erwarb wohl gar bei Prüfungen und Revisionen lobende Anerkennung. So ging man ohne Anregung der Denkkraft von Rechnung zu Rechnung, bis über den neuen Regeln die alten allmählich vergessen wurden und mit ihnen auch die Befähigung zur Auflösung der betreffenden Aufgaben verloren ging. „Ich habe es früher gewußt, wie diese Exempel gerechnet werden, ich war einer der besten Rechner in der Schule, aber ich habe die Regel vergessen," das konnte man im späteren Leben oft genug von so unterrichteten Schülern zu hören bekommen.

Allerdings sind Regeln bis zu einem gewissen Grade notwendig, und dieselben sollen auch so eingeübt werden, daß ihre Anwendung schließlich mechanisch erfolgt, denn ohne dies ist praktische Fertigkeit im Rechnen nicht zu erreichen. So soll z. B. sicher die Regel gelernt werden: Man multipliziert zwei Brüche, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert, und der Schüler soll bei der späteren Anwendung nicht nötig haben, sich dieselbe durch Wiederholung ihrer Ableitung im einzelnen Falle immer aufs neue aufzustellen, auch braucht er sich keineswegs bei solcher Anwendung die Gründe für die Richtigkeit jedesmal wieder ins Bewußtsein zurückzurufen. Aber die Regel soll vom Lehrer nicht als reine Vorschrift aufgestellt, sondern auch so begründet werden, daß der Schüler durch ihre Ableitung eine Denkübung erhalte und allmählich befähigt werde, diese Ableitung für den Fall des Vergessens einer solchen Regel jederzeit selbständig wieder-

holen zu können. Er soll schon hier lernen, ein Rechnungsverfahren nicht bloß auf Treu und Glauben für richtig gelten zu lassen, sondern dasselbe als begründet erkennen. Damit wird zugleich dem mathematischen Unterricht, welcher überall Beweise verlangt, durch richtige Gewöhnung und Übung der Schüler vorgearbeitet.

Zwei Gefahren bringt die vorstehende Forderung für den angehenden Lehrer mit sich: die Begründung der Regeln darf nicht in abstrakter Weise geschehen, für deren Verständnis die Schüler noch nicht reif sind, und sie darf nicht so weitläufig sein, daß sie ermüdet und den Übungen zum Erwerb praktischer Rechenfertigkeit die Zeit entzieht. Nicht also wissenschaftliche Beweise sind zu geben, sondern es ist überall die Veranschaulichung zu benutzen. Hierzu ist ein durchaus geordneter stufenmäßiger Lehrgang erforderlich, der vom Einfachen zum Zusammengesetzten fortschreitet und das Lehrgebäude allmählich entwickelt. Jedes neue Gebiet wird zuerst als Aufgabe an bestimmtem Zahlenbeispiel auftreten, die Lösung derselben wird an letzterem und an einer Reihe geeigneter weiterer Beispiele unter Heranziehung der selbständigen Denkthätigkeit der Schüler erläutert, ehe man dazu übergeht die Regel zu abstrahieren und durch Worte auszudrücken. Auch weiterhin lasse man zur Begründung des Verfahrens an den einzelnen Exempeln zuerst nicht bloß den Wortlaut der Regel angeben, sondern zugleich die Begründung auf den vorliegenden besonderen Fall angewendet ausführen. Wird z. B. $\frac{9}{10} \cdot \frac{3}{5}$ vorgerechnet, so hat der Schüler etwa, wie folgt, zu sagen: $\frac{3}{5}$ ist der fünfte Teil von drei Ganzen; multipliziert man $\frac{9}{10}$ mit 3, so erhält man $\frac{27}{10}$; man soll aber nur mit dem fünften Teil von 3 multiplizieren, also muß $\frac{27}{10}$ noch durch 5 dividiert werden; dies giebt $\frac{27}{50}$. — Ist aber dann das Verfahren vollkommen klar geworden, so übe man es durch eine hinreichend große Menge von nach der Regel gerechneten Beispielen bis zur praktischen Fertigkeit ein, damit auch die zweite der oben genannten Aufgaben des Unterrichts zu ihrem Rechte gelange.

Die Ableitung der Regel und die erste Einübung derselben geschieht zweckmäßig nur an Kopfrechenexempeln, damit nicht durch Nebenrechnung und den Gebrauch des Schreibstifts die Aufmerksamkeit von dem abgelenkt werde, worauf sie zunächst allein gerichtet sein soll. Später und namentlich zu Hause sind auch schriftliche Rechnungen zu machen. Auch bei den letzteren soll so viel als möglich im Kopfe gerechnet, so wenig als möglich geschrieben werden. Wir verstehen unter Aufgaben für schriftliches Rechnen alle diejenigen, bei welchem es dem Schüler nicht möglich ist, die ganze Reihe der nötigen Zahlen im Gedächtnis zu behalten, sondern bei denen er der Fixierung mindestens eines oder mehrerer Zwischenglieder durch die Schrift bedarf. Für dieselben, zum wenigsten für die häuslichen Übungsaufgaben, ist ein Aufgabenbuch in den Händen der Schüler erforderlich, wenn nicht kostbare Zeit durch Diktieren verloren gehen soll.

Kopfrechenaufgaben kann der Lehrer ohne Mühe jeden Augenblick selbst bilden, und er muß dies zum Teil, weil der Schüler auch in der Behandlung von Zahlen geübt werden muß, die er nicht vor Augen hat, und weil dadurch eher die ungeteilte Aufmerksamkeit auf den Lehrer und die Sache, sowie allzeit bereite Schlagfertigkeit erzielt wird. Der Lehrer muß dazu hinreichend geübt sein, passende Exempel ohne längeres Besinnen zu bilden; er muß die zweite Aufgabe schon fertig zur Hand haben, wenn die erste von der Klasse zu Ende geführt ist. Das erfordert allerdings Anstrengung, weil zwei verschiedene Gedanken gleichzeitig im Sinne behalten werden müssen und dazu noch die ganze Klasse beaufsichtigt und in Thätigkeit erhalten werden muß. Ein solcher Rechenunterricht wirkt für den Lehrer sehr ermüdend, es ist aber dieses Verfahren notwendig. Denn wenn nach jedem ausgerechneten Exempel eine Pause eintritt, damit der Lehrer sich in derselben auf ein neues besinne, so geht nicht bloß Zeit verloren, sondern es tritt auch leicht Zerstreuung ein. Kann der Lehrer noch nicht so arbeiten, so schreibe er sich wenigstens die Aufgaben vor der Stunde auf und lese sie meinethalben ab.

Kopfrechenaufgaben müssen aber auch im Rechenbuche stehen und abwechselnd aus diesem benutzt werden, schon um zu verhüten, daß (was dem Improvisator leicht widerfährt) wichtige Arten von Beispielen vergessen, oder daß einander allzu ähnliche Exempel über Bedarf gehäuft werden. Es ist notwendig, daß diese Kopfrechenaufgaben im Buche von denen für schriftliches Rechnen scharf gesondert seien, damit kein unsicherer Wechsel eintrete. Der Schüler muß wissen, wann er die Feder nicht in der Hand haben darf.

Das rasche, schlagfertige Kopfrechnen ist für die Schüler weniger ermüdend, als es vielleicht den Anschein hat, wenn die Aufgaben stets ihren Kräften angepaßt sind und in richtigem methodischen Fortschritt langsam zu schwierigeren aufsteigen. Die Schüler rechnen gerade hierbei mit besonderer Lust. Doch hat auf die Dauer die Anspannung selbstverständlich auch Abspannung zur Folge, daher ist ein Wechsel der Thätigkeit geboten. Dazu dient das schriftliche Rechnen, welches schon deshalb nicht bloß zu Hause geübt werden darf. Der Lehrer hat auch für dieses besondere Anleitung zu geben, indem er zuerst gemeinschaftlich mit der ganzen Klasse einzelne Exempel an der Wandtafel rechnet oder von aufgerufenen Schülern unter Mithilfe der Klasse rechnen läßt, wobei neben die Unterweisung in dem Verfahren auch diejenige in richtiger, geordneter Schreibweise tritt. Zuletzt rechnen dann die Schüler für sich auf dem Papiere oder der Schiefertafel, und zwar thunlichst alle zu gleicher Zeit dieselben Exempel, damit die nötige Kontrole des Lehrers erleichtert wird.

Es ist ein Irrtum, wenn behauptet wird, daß das Verfahren beim schriftlichen und das beim Kopfrechnen durchweg dasselbe sein müsse; ein sehr wichtiger Unterschied beider liegt darin, daß das schrift-

liche Rechnen eine beliebig lange Reihe von Zahlen anzuschreiben gestattet, ehe man zur Verbindung einzelner schreitet, während der Kopfrechner dafür zu sorgen hat, daß er nicht durch Anhäufung von Zahlen in die Gefahr gerate, daß ihm die eine oder die andere entfalle. Daher wird der Kopfrechner im allgemeinen eine Verbindung zweier Zahlen sogleich ausführen, damit er statt der getrennten beiden nur eine zu behalten hat; bei dem schriftlichen Rechnen dagegen wird man gut thun, den ganzen Ansatz erst anzuschreiben, ehe man zum Ausrechnen schreitet, weil nur in diesem Fall die Möglichkeit von Abkürzungen vollständig übersehen werden kann. Als erläuterndes Beispiel hierzu mag die folgende Aufgabe dienen:

Ein Landmann pflügt mit 4 Pflügen in $3\frac{1}{2}$ Tagen, den Tag zu 12 Stunden, 6,4 ha; wieviel wird er mit 3 Pflügen in 14 Tagen bei täglich $10\frac{1}{2}$ stündiger Arbeit pflügen? (Aus Harms und Kallius, Rechenbuch.)

Der schriftlich Rechnende wird hier zuerst alle nach einander zu machenden Operationen bloß anschreiben, so zu dem Ansatze

$$\frac{6{,}4 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 14 \,.\, 21}{4 \,.\, 7 \,.\, 12 \,.\, \quad 2}$$

gelangen und dann übersehen, daß er 2 . 3 . 14 gegen 7 . 12 aufheben und 4 . 2 in 6,4 dividieren kann, sodaß er nur noch $0{,}8 \,.\, 21 = 16{,}8$ zu rechnen hat. Sollte dasselbe Exempel (oder etwa ein ähnliches mit noch leichteren Zahlen) im Kopfe gerechnet werden, so würde das Gedächtnis nicht bis zum Schlusse aushalten, sondern es müßten die Operationen in ihrer Reihenfolge ausgeführt werden, etwa wie folgt: Unter sonst gleichen Umständen werden gepflügt mit einem Pfluge $6{,}4 : 4 = 1{,}6$ ha, mit einem Pfluge in einem Tage $1{,}6 : 3\frac{1}{2} = 1{,}6 \,.\, \frac{2}{7} = \frac{32}{70} = \frac{16}{35}$ ha, und bei einstündiger Arbeit $\frac{16}{35} : 12 = \frac{4}{105}$ ha. Ebenso kommen dann weiter nach einander die einzelnen Exempel $\frac{4}{105} \,.\, 3 = \frac{4}{35}$; $\frac{4}{35} \,.\, 14 = \frac{8}{5}$; $\frac{8}{5} \,.\, \frac{21}{2} = 16{,}8$ zur Ausführung.

In betreff der Wahl der Einkleidungen wird der u. a. von Kober (Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht II, S. 115) ausgesprochenen Ansicht im allgemeinen beizustimmen sein: „Der Gegenstand der angewandten Aufgaben muß möglichst selbständiges Interesse bieten und dem übrigen Streben der Schüler angemessen sein. Der Gymnasiast soll nicht in die Höckerbude und die Dorfschenke heruntergedrückt, sondern in seinen übrigen Studien (Geschichte, Geographie, Naturwissenschaft) gefördert werden. Man muß aber hierbei Maß halten, sodaß der Gegenstand nicht über den Horizont des Schülers hinausgeht; insbesondere soll das Schulbuch kein kaufmännisches, dem Handlungskommis angepaßtes Rechenbuch sein. Auch müssen die Ansprüche an die Denkkraft Maß halten, daher schwierige Gleichungsaufgaben (ohne Gleichungen!) nicht dem Quartaner zugemutet werden dürfen." Man wird dem nur hinzuzufügen haben, daß damit nicht der Ausschluß aller aus

dem praktischen Verkehrsleben entnommenen Aufgaben und die alleinige Behandlung von solchen aus anderen Unterrichtsgebieten gefordert sein soll, denn das verbietet sich von selbst, und der Schüler soll ganz gewiß besonders geübt werden, die ihm im praktischen Leben vorkommenden Aufgaben gewandt und sich erlösen zu können; nur gegen die Extreme kann der Tadel gerichtet sein, bei denen auf der einen Seite von gar nichts anderem als von Butter und Käse oder ähnlichem die Rede ist, auf der anderen Wechselarbitrage, Effektenrechnung und ähnliche kaufmännische Dinge mit der erforderlichen mehr oder minder ausführlichen Theorie gelehrt werden.

In ähnlicher Weise urteilt Schmitz in d. Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht XIV, S. 107: „Die allgemeine Tendenz ist gegenwärtig gegen die trivialen Aufgaben, die nach Stall und Küche riechen, gerichtet. Ganz wird man dieselben nie vermeiden können. Denn es ist natürlich, daß die Elemente des Rechnens auf die einfachsten Verhältnisse des Lebens zuerst angewendet werden. Und es sind einmal die Anfänge jedes Wissens unpoetisch, das Einmaleins so gut als das Deklinieren. Auch antike Rechenaufgaben*) werden da nicht viel Abhilfe schaffen, da ein Medimnos kaum etwas vor einem Hektoliter, und eine Drachme kaum etwas vor einer Mark voraus hat. — Aber Aufgaben, die den Schüler unmittelbar an häusliche Vorgänge, wie das Kaffeekochen erinnern und notwendig seine Heiterkeit erregen müssen, sollte man vermeiden."

§ 26.

Einen ausführlichen Lehrplan des Rechenunterrichts mit vollständiger Anleitung für jeden einzelnen vorkommenden Fall nach den im vorigen angedeuteten Richtungen zu geben, kann hier nicht unsere Aufgabe sein; dazu giebt es eigens für diesen Zweck bestimmte Schriften, aus denen auch der angehende Lehrer an höheren Schulen manchen nützlichen Wink und manche Anregung schöpfen wird. Es würde hier auch nicht möglich sein, allen Verhältnissen gerecht zu werden. Der in Rede stehende Unterricht wird nicht an unseren Schulen begonnen, dieselben empfangen ihre Schüler, nachdem diese bereits einen Teil des Rechenunterrichts hinter sich gebracht haben; die Vorbildung derselben wird nicht überall von ganz gleicher Art gewesen sein, und durch die letztere wird diejenige der Weiterführung mit bedingt. Ein stufenmäßig geordneter Aufbau des Ganzen muß ferner schon durch das eingeführte Rechenbuch gegeben sein, und der Lehrer muß sich diesem anschließen. Dasselbe braucht deshalb kein Lehrbuch zu sein, sondern nur eine Aufgabensammlung; doch wird es nichts schaden, wenn dasselbe

---

*) Man vergl. die Schrift: Menge u. Werneburg, Antike Rechenaufgaben, Leipzig, Teubner und die Recension derselben in d. Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht XIII, 131.

die schließlich zu lernenden Regeln in der bestimmten Wortfassung kurz angiebt, in welcher sie am besten behalten werden. Im übrigen aber soll der Schüler die Methoden der Rechnungen nicht aus dem Buche, sondern durch den Lehrer lernen; sie sollen im Unterricht entwickelt, nicht aber in einem Leitfaden fertig vorgefunden werden.

Nur einige allgemeine Punkte mögen noch kurz erwähnt werden: Daß die Decimalbrüche nicht als eine besondere Art der gemeinen Brüche eingeführt werden, sondern als eine Fortsetzung des dekadischen Zahlensystems mittelst Einheiten niederer Ordnung, ist seit die decimal eingeteilten Maße, Gewichte und Münzen in Deutschland zur Geltung gekommen sind, mehr und mehr verlangt worden, jedoch ohne bis jetzt allgemeinen Beifall gefunden zu haben. Die Gründe für diese Einrichtung, durch welche die Behandlung der Decimalbrüche vor diejenige der gemeinen gesetzt wird, sowie eine Anleitung zur Erteilung des betreffenden Unterrichts findet man u. a. in ausführlicher Darlegung in „Mauritius, Decimales Rechnen und metrisches Messen, Paderborn 1869". Auch verschiedene Arbeiten von Kallius bieten nach dieser Richtung, wie auch über die Anordnung und Verteilung des Rechenunterrichts an höheren Schulen überhaupt und im Einzelnen manche Belehrung. Man vergleiche u. a. den Aufsatz desselben über die Rechnung mit allgemeinen Decimalzahlen und ihre Stellung im Unterrichtspensum der höheren Schulen in der Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht VII, S. 13 ff. Die Gegengründe gegen die neuere Lehrweise findet man u. a. in den Instruktionen für den Unterricht an den Gymnasien in Österreich, S. 261 ff. zusammengestellt.

Die Verwandlung von Decimalbrüchen in gemeine und umgekehrt, die Lehre von den periodischen Decimalbrüchen und das auf den höheren Lehranstalten nicht zu vernachlässigende Gebiet der abgekürzten Rechnungen können selbstverständlich ihre Stelle nur nach den gemeinen Brüchen finden. Die Lehre von den letzteren ist durch die neuen Währungszahlen in der Anwendung auf Aufgaben des praktischen Lebens erheblich entlastet, doch ist sie nach wie vor mit gründlicher Sorgfalt und Ausdehnung zu behandeln, schon weil der spätere arithmetische Unterricht einer fertigen Geübtheit im Rechnen mit denselben bedarf.

Die Anwendung der Proportionen zur Auflösung von Regeldetri-Exempeln und anderen Aufgaben der sog. bürgerlichen Rechnungsarten wird gegenwärtig ziemlich allgemein abgelehnt und durch die bildendere Ausführung des Schlusses auf die Einheit ersetzt. Die Proportionen sind zwar an den höheren Schulen nicht zu entbehren, besonders wegen ihrer Anwendung in der Geometrie, sie finden aber eine zweckentsprechendere Stelle in der Buchstabenrechnung oder in der Algebra. Vgl. § 29. Seinen Abschluß findet der Rechenunterricht mit den schwierigeren der genannten Rechnungen in Quarta.

Daß derselbe an den Realanstalten noch eine hierüber hinausgehende Fortsetzung erhalte, ja daß er hier durch alle Klassen bis zur

Prima fortzuführen sei, ist vielfach, z. B. auf Direktorenkonferenzen, verlangt und auch durch Unterrichtsbehörden in allgemeinen Lehrplänen vorgeschrieben worden. Verf. hält dies jedoch bei einem richtig geleiteten Unterricht in den mathematischen Disciplinen, besonders der Buchstabenrechnung und Algebra, im allgemeinen nicht für erforderlich, denn in diesem soll auch das praktische Rechnen fortdauernd angewendet, geübt und erweitert werden. Andererseits hat die Schule im allgemeinen nicht die Aufgabe, einen wesentlichen Teil ihrer kostbaren Zeit auf die Unterweisung in der Anwendung des praktischen Rechnens auf die Aufgaben der kaufmännischen oder anderer Berufsarten zu verwenden. Nur an Orten, wo vielleicht die besonderen lokalen Verhältnisse eine derartige Rücksichtnahme auf den zukünftigen Beruf eines erheblichen Teils der Schüler wünschenswert machen, mag die Schule dieser Rücksicht, so weit als thunlich oder erforderlich, nachgeben dürfen. Vielleicht aber steht der Verfasser mit dieser Ansicht allein.

Die dritte Aufgabe des Rechenunterrichts, eine Propädeutik des wissenschaftlichen arithmetischen zu sein, ist schon im vorstehenden stellenweise berücksichtigt worden. Wir führen außerdem zunächst einige Punkte an, welche als Kleinigkeiten erscheinen können, aber trotzdem nicht ohne Bedeutung sind. Hierher gehört, daß die wissenschaftlichen Bezeichnungen von Anfang an eingeführt und ständig benutzt werden. Welche Last hat nicht der Lehrer der Mathematik im anderen Fall z. B. durch die immer wiederkehrende Verwechselung der Summanden mit ihrer Summe infolge der Anwendung des Wörtchens „und" statt plus, wie schwer ist es, später das oft ganz ungeschickt angebrachte „Mal nehmen" durch das Multiplicieren zu verdrängen und überhaupt eine exakte Aussprache der Gesetze zu erzielen! Die Volksschule hat ja in ihrer Weise ganz recht, wenn sie die Fremdwörter durch passende deutsche zu ersetzen sucht; der mathematische Unterricht aber kann die allgemein geltenden und wissenschaftlich scharf definierten termini technici nicht entbehren. Das Umlernen-Müssen mit seinem schwierigen Kampfe gegen eingewurzelte Gewohnheiten ist jedenfalls für ihn eine schlechte Zugabe.

Ähnliches gilt für die in den Volksschulen — nach Ausweis mancher Rechenbücher — oft geradezu falsche Anwendung von Operationszeichen. Der verkehrte Gebrauch des Doppelpunktes, z. B. in $4 : 12 = 3$, scheint glücklicherweise mehr und mehr zu verschwinden und hat selbst zu behördlichen Verboten Veranlassung gegeben; dagegen ist die falsche Anwendung des Gleichheitszeichens in Sätzen, wie z. B.

$$12 : 4 = 3 \times 7 = 21 - 5 = 16 + 8 = 24$$

anscheinend noch sehr verbreitet.

Direkt förderlich für den späteren Unterricht sind möglichst zahlreiche Übungen im Gebrauche der Klammern und der Auswertung zusammengesetzter Zahlenausdrücke, wie z. B.

$$\frac{(6{,}412 - 3{,}7045) \,.\, 1{,}2 + 3{,}3}{4{,}68 : 0{,}8 - 3{,}7 \,.\, 1{,}3}$$

u. dgl. m. Zur Vorbereitung für die Buchstabenrechnung dienen ähnliche Ausdrücke in Buchstaben, in welche für letztere noch verschiedene bestimmte Zahlwerte behufs nachfolgender Ausrechnung eingesetzt werden.

Wichtiger als alle derartige Einzelhilfen ist die ganze Art und Weise, nach welcher der Unterricht als Vorschule der wissenschaftlichen Arithmetik zu behandeln ist. Auch hierbei ist es uns nicht möglich, eine Anleitung für alle besonderen Fälle zu geben, dies würde die Abfassung eines ausgeführten Lehrbuches für den Rechenunterricht zum Gebrauche des Lehrers statt einer allgemeinen methodischen Anleitung nötig machen; wir begnügen uns also auch hier mit einem Beispiel und wählen dazu die Multiplikation eines Bruches mit einer ganzen Zahl.

Schon früher ist bemerkt worden, daß kein wissenschaftlicher Beweis gegeben werden soll, daß vielmehr der Unterricht der höheren Schule mit dem der Volksschule die Forderung eines anschaulichen Verfahrens mit Hilfe konkreter Beispiele gemeinsam hat. Man wird daher in beiden Fällen mit einer leichten angewandten Aufgabe beginnen: Jemand bekam zweimal nach einander $\frac{3}{4}$ Apfel, wieviel hatte er nun? Da $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4}$, so ist $\frac{3}{4} \,.\, 2 = \frac{6}{4}$. Ein Meter kostete $\frac{9}{10}$ Mark; wieviel kosteten 3 Meter? Da $\frac{9}{10} \cdot 3 = \frac{9}{10} + \frac{9}{10} + \frac{9}{19} = \frac{27}{10}$, so erhält man den Wert von $\frac{9}{10} \cdot 3$ durch Multiplikation des Zählers 9 mit der Zahl 3. Aus solchen Beispielen folgt die Regel: Ein Bruch kann mit einer ganzen Zahl multipliciert werden, indem man seinen Zähler mit derselben multipliciert. (Der Nenner bleibt unverändert.) Diese Regel wird nun zunächst mittels zahlreicher Beispiele eingeübt, und damit ist die Aufgabe des Elementarschulunterrichts im wesentlichen erledigt. Wenigstens sagt der Verfasser des vielleicht am meisten gebrauchten Rechenbuches für Volksschulen, A. Böhme, in seiner „Anleitung zum Unterricht im Rechnen, Berlin, G. W. F. Müller" zu dieser Stelle:

„Der Bruch kann auch multipliciert werden, indem man den Nenner dividiert; das läßt sich jedoch nur selten, nur dann anwenden, wenn der Nenner gerade ein Vielfaches des Multiplikator ist. Da wir den Schüler zur Erkenntnis der allgemein giltigen Regel führen wollen, so lassen wir die Multiplikation des Bruches durch Division des Nenners vorläufig ganz fort; der d e n k e n d e Schüler kommt wohl selbst in einzelnen Fällen darauf; der geistig schwächere möge immerhin den weiteren Weg gehen; besser, auf e i n e m Wege sicher zum Ziele zu gelangen."

Diese Methodik hat darin auch für uns recht, daß die beiden Regeln nicht gleichzeitig, sondern nach einander gelehrt werden müssen; erst muß die eine vollständig sicher eingeübt sein, ehe die andere kommen darf, wenn nicht die Gefahr der Verwirrung entstehen soll. Dagegen

verlangen wir, daß auch die zweite Regel unter allen Umständen gelernt werden und daß sie als „allgemein giltig", gerade so gut wie die erste, erkannt werde. Denn der Schüler soll zu der später von ihm geforderten Abstraktion allgemeiner Zahlengesetze allmählich vorbereitet werden. $\frac{3}{4} \cdot 5$ ist ebenso richtig gleich $\frac{3}{4 : 5}$, wie gleich $\frac{3 . 5}{4}$ zu setzen, und nur die praktische Ausführung ist im ersten Falle bevorzugt. Der Schüler hat also, nachdem die zweite Regel in entsprechender Weise, wie die erste abgeleitet worden (selbstverständlich zunächst an Beispielen wie $\frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$, $\frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}$ u. dgl.), beide zu einer allgemeinen Regel zu verbinden: Ein Bruch kann mit einer Zahl multipliciert werden, indem man entweder den Zähler mit der Zahl multipliciert, oder indem man den Nenner durch die Zahl dividiert (und den anderen Bestandteil des Bruches jedesmal unverändert beibehält). In der praktischen Ausführung wird jedesmal die zweite Regel angewendet, wenn der Nenner ein Vielfaches des Multiplikators ist. Durch fernere Übungen wird die Regel noch weiter ausgeführt. Schon früher soll in dem stufenmäßig geordneten Lehrgang auch der Satz vorgekommen sein: Mit einem Produkt kann multipliciert werden, indem man mit den einzelnen Faktoren nach einander multipliciert. Die Anwendung desselben auf Exempel, wie $\frac{5}{12} \cdot 28 = \frac{5}{12} \cdot (4 \cdot 7)$ führt zu gemeinsamer Anwendung der beiden Regeln nach einander.

Der kundige Leser wird aus diesem Beispiel schon erkennen, was wir meinen; der Unterricht soll nicht mit dem Allgemeinen beginnen, aber er soll die Richtung auf dasselbe haben und sein späteres Auftreten vorbereiten. Zu diesem Zweck soll die zweite Regel in unserem Beispiel nicht als Ausnahme erst nach Unterbrechung des Zusammenhangs durch andere Gebiete mehr oder minder gelegentlich vorkommen, sondern sie soll als der ersten gleichberechtigt auftreten und an dieselbe angeschlossen, mit ihr verknüpft werden. Dieses Verfahren wird nebenbei auch bei richtiger Handhabung einen wesentlichen Einfluß auf die schlagfertige Rechenfertigkeit gewinnen. Ist der Schüler durch langdauernde ausschließliche Anwendung der einen Regel an dieselbe mechanisch gewöhnt worden, so hält es nachher sehr schwer, ihn dahin zu bringen, daß er nicht z. B. $\frac{17}{288} \cdot 144$ durch Multiplikation des Zählers berechne. Jeder Lehrer der Mathematik, dessen Schüler im Elementarunterricht in solcher Art behandelt worden, wird diese Erfahrung in zahlreichen Fällen gemacht haben. Die Befürchtung, daß das Erlernen verschiedener Wege nach demselben Ziele zu einem Mangel an Sicherheit gegenüber der Beschränkung auf *einen* Weg führen werde, ist bei richtigem Verfahren unbegründet; allerdings wird dabei zu bedenken sein, daß dem Schülermaterial der höheren Schule im allgemeinen wohl etwas mehr zugemuthet werden darf, als bei einem Teile der Zöglinge der Elementarschulen der Fall sein mag, wenigstens

wenn man annehmen darf, daß die am schwächsten Begabten unter den letzteren in der Regel der höheren Lehranstalt nicht zugeführt werden.

Rechenbücher zum Gebrauche der Schüler, welche in dem angegebenen Sinne für höhere Schulen brauchbar sind, zu empfehlen, ist eine mißliche Sache. Die Zahl der überhaupt vorhandenen Aufgabenbücher für das praktische Rechnen ist so übergroß, daß der Einzelne nicht einmal den Versuch machen kann, dieselben zu überblicken; unter den dem Verf. bekannt gewordenen befindet sich keins, welches ihn nach allen Richtungen befriedigte. Einer thatsächlich sehr großen Verbreitung an höheren Schulen scheint sich das Rechenbuch von Schellen zu erfreuen. Ohne dasselbe hier einer sachlichen Beurteilung unterziehen zu wollen, dürfen wir doch bemerken, daß sein Gebrauch durch umfassende Änderungen in rasch aufeinander erfolgten Auflagen für solche Schulen recht erschwert scheint, an welchen es nicht zu vermeiden ist, daß die Schüler derselben Klasse Ausgaben von sehr verschiedenem Alter besitzen, sowie auch daß — wenigstens in den von uns benutzten Auflagen — ein auffallend rascher Wechsel zwischen ganz leichten und schwierigeren Aufgaben ohne äußere Scheidung derselben störend wirkt. Die Forderung, daß die Exempel für das schriftliche Rechnen von denen für das Kopfrechnen thunlichst getrennt seien, ist — vielleicht infolge abweichender methodischer Ansicht des Herausgebers — nicht erfüllt. Ein anderes auf höheren Schulen viel gebrauchtes und gut empfohlenes Buch ist „Harms und Kallius, Rechenbuch für Gymnasien, Realgymnasien u. s. w., Oldenburg, Stalling“; dasselbe hat in der That viele vortreffliche Seiten. Zum Studium des angehenden Lehrers, der daraus manche Anregung schöpfen wird, kann u. a. empfohlen werden: „Henrici, Lehrbuch für den Rechenunterricht. Propädeutik der allgemeinen Arithmetik zum Gebrauche an höheren Lehranstalten. Heidelberg, Weiß“.

Es erübrigt noch ein Wort über die häuslichen Arbeiten auf dieser Stufe. Aufgaben zum schriftlichen Rechnen, welche von Stunde zu Stunde aufgegeben werden, sind durch Vergleichung der Resultate und durch die Aufforderung zur Angabe des Verfahrens bei zweifelhaften Schülern, sowie durch raschen Überblick über die vorgelegten Rechnungen Einzelner von seiten des Lehrers innerhalb der Schulstunden zu kontrolieren. Auf saubere und geordnete Schreibweise ist dabei entschieden zu achten, eine eigentliche Reinschrift jedoch in der Regel nicht zu verlangen. Denn da dieselbe nur im mechanischen Kopieren der ersten Ausrechnung besteht, so entspricht der durch sie erzielte Gewinn nicht der aufgewendeten Zeit. Die Schüler sollen allmählich lernen, die Rechnungen sogleich bei der ersten Ausarbeitung in hinlänglicher Ordnung und Sauberkeit zu schreiben. Nur wo dies nicht gelingen will, sind Reinschriften zu verlangen. Auch regelmäßig wiederkehrende Heftaufgaben zur Korrektur des Lehrers werden in Sexta und Quinta im allgemeinen noch entbehrt werden können, da-

gegen in Quarta bei den bürgerlichen Rechnungsarten, der Auswertung von Formeln u. dgl. in Abwechselung mit geometrischen Arbeiten recht nützlich sein, um die Schüler an eine geordnete schriftliche Darlegung ihrer Gedanken zu gewöhnen.

Bei allen Rechenaufgaben sind Zahlen mit einer in der Praxis nie vorkommenden Menge von Ziffern zwar nicht ganz auszuschließen, aber doch auf ein sehr geringes Maß zu beschränken. Dieselben können unter Umständen ganz nützlich sein, um einzelne Operationen eingehend zu üben, auch muß der Schüler die Befähigung erlangen, solche Zahlen aussprechen und mit denselben — z. B. mit noch mehr als siebenstelligen Decimalbrüchen — rechnen zu können. Hierzu bedarf es aber nicht ausgedehnter Übungen, welche die Gefahr mit sich bringen, daß die für Besseres nötige Zeit durch mechanische Arbeit ohne geistigen Gewinn verbraucht, und daß das Interesse mangels der nötigen Anregung und Abwechselung ertötet werde.

b) Arithmetik.

§ 27. Die Aufgabensammlungen.

Daß im arithmetischen Unterricht die praktischen Übungen in der Anwendung der Theorie mit der letzteren ununterbrochen Hand in Hand gehen müssen, ist wohl jederzeit fast allgemein anerkannt worden, ja man kann sagen, daß auf diesem Gebiete die Aufgabensammlung mehr gebraucht wird, als das Lehrbuch. Man ist sogar soweit gegangen zu behaupten, daß das letztere ganz entbehrt, weil die Theorie bloß auf Grund der Beispiele erlernt und geübt werden könne. Dieser Ansicht kann jedoch nicht zugestimmt werden. Soll die Arithmetik vollen Anteil an der Lösung der allgemein bildenden Aufgabe des mathematischen Unterrichts nehmen, so darf dieselbe nicht bloß Regeln, sondern sie muß auch Gesetze lehren. Diese Gesetze dürfen nicht bloß aus einzelnen Beispielen abstrahiert, sondern sie müssen auch als allgemein giltig begründet, sie müssen in ihrem inneren Zusammenhange erkannt und zu einem wissenschaftlichen System verbunden werden. So erfordern z. B. die allmählichen Erweiterungen des ursprünglichen einfachen Zahlbegriffs auf negative, gebrochene, irrationale und imaginäre Zahlen theoretische Betrachtungen, welche für die Schüler keineswegs leicht sind, und für deren Wiederholung dieselben nicht auf bloße Exempel angewiesen werden können, für welche sie vielmehr eines Lehrbuches mindestens eben so gut bedürfen, wie für andere Teile des mathematischen Unterrichtspensums. Vgl. S. 52.

Vereinzelt sind auch entgegengesetzte Stimmen laut geworden, welche eine Aufgabensammlung in den Händen der Schüler für entbehrlich, wenn nicht gar für schädlich erklärten. Der Lehrer solle die zur Erläuterung und Einübung notwendigen Aufgaben selbst bilden

oder wenigstens aus Sammlungen zusammenstellen, um dieselben stets dem jeweiligen Bedürfnisse seiner Schüler unmittelbar anzupassen. Hierbei würden jedoch zunächst die häuslichen Übungen ganz fortfallen müssen, wenn nicht zeitraubende Diktate nötig werden sollten, auch müßte der Lehrer alle Aufgaben für die Unterrichtsstunde, welche nicht so kurz sind, um vollständig im Kopfe behalten zu werden, entweder an der Wandtafel anschreiben oder den Schülern diktieren. Mit einem solchen Verfahren, wenigstens wenn es zur ausnahmslosen Regel erhoben wird, dürften sich aber nur wenige Lehrer befreunden, da sein etwaiger Nutzen durch die leicht ersichtbaren Nachteile überwogen wird.

Wenn demnach eine Aufgabensammlung neben dem Lehrbuche in den Händen der Schüler sein und fleißig benutzt werden soll, so wird zunächst gefragt werden müssen, welche Eigenschaften eine solche Sammlung besitzen muß, um möglichst brauchbar zu sein. In dieser Beziehung ist es zunächst als dringend wünschenswert zu bezeichnen, daß dieselbe in innigstem Anschluß an das Lehrbuch verfaßt sei, sodaß die Aufeinanderfolge der einzelnen Teile und die Art des Entwickelungsganges in beiden übereinstimmen, ja womöglich zu jedem einzelnen Paragraphen des Lehrbuchs das erforderliche Übungsmaterial im einzelnen zusammengestellt sei, damit jedem Satze unmittelbar seine Einübung folgen könne und Theorie und Praxis in die innigste Verbindung gesetzt werden.

Gegen eine derartige Einrichtung, welche das Übungsmaterial übersichtlich nach den einzelnen Paragraphen und Sätzen ordnet, ist von einer Seite Widerspruch erhoben worden. Diese Gegnerschaft stützt sich im wesentlichen darauf, daß die Schüler bei dem Gebrauche eines solchen Buches nicht zur Selbständigkeit gelangten, weil sie bei jeder einzelnen Aufgabe die anzuwendende Regel in der Überschrift angegeben fänden, also dieselbe mechanisch anwenden würden, und nicht in die Lage kämen, das zur Auflösung der Aufgabe erforderliche oder zweckdienliche Verfahren aus eigener, geistiger Thätigkeit aufzufinden. Der Verfasser dieses Buches muß gestehen, daß er es unbegreiflich findet, wie eine solche wunderliche Ansicht ausgesprochen werden kann. Denn zunächst ist es doch pädagogisch richtig, daß die praktische Anwendung eines Satzes durch bewußte Ausübung der in ihm enthaltenen Regel nicht bei mehr oder minder gelegentlichem Vorkommen derselben, sondern an unmittelbaren und hinreichend zahlreichen Beispielen bis zu einer gewissen Fertigkeit gebracht werden muß, und daß diese Beispiele von den Schülern selbst bearbeitet werden müssen. Sodann ist es geradezu unwahr, daß die letzteren nicht dazu angeleitet würden, die einzelnen anzuwendenden Regeln selbst auffinden und angeben zu müssen. Es führt uns dies auf eine zweite Eigenschaft, welche alle besseren Aufgabensammlungen besitzen, und die allerdings nicht fehlen darf.

In den Aufgaben eines jeden folgenden Paragraphen ist nämlich nicht bloß der in ihm neu auftretende Satz anzuwenden, sondern es

sind auch die früheren — die dann nicht wieder genannt werden — thunlichst zu wiederholen. Nur die ersten Beispiele sollen jedesmal ausschließlich der Einübung und Erläuterung des neuen Satzes dienen; die folgenden sind von mehr oder minder zusammengesetzter Art zu wählen, sodaß sie die Vereinigung der neuen Operationen mit verschiedenen älteren fordern. Wie kann man z. B. sagen, daß der Schüler den Satz $a : \frac{b}{c} = \frac{a \,.\, c}{b}$ nur unter der Überschrift desselben übe und niemals in die Lage komme, selbständig über seine Anwendung zu urteilen, wenn er etwa später bei dem Satze $a^m : b^m = (a : b)^m$ Beispiele, wie $a^x : \left(\frac{b}{c}\right)^x$ zur Berechnung vorgelegt erhält? Oder wenn, um noch ein Beispiel anzuführen, der Schüler zu dem Satze $a - b + c = a + c - b$ die Aufgabe erhält

$$9a - (9a - 7b) - 4c + 11b + 2c,$$

übt er dann nicht zunächst den Satz $a - (a - b) = b$ eines kurz vorhergegangenen Paragraphen, ohne daß er in der Überschrift des neuen ihm zu mechanischer Anwendung vorgelegt ist, um dann erst an $7b - 4c + 11b$ den obigen Satz anzuwenden und dann weiter an $18b - 4c + 2c$ den entsprechenden $a - b + c = a - (b - c)$ zu benutzen?

Ein derartiges Verfahren, bei welchem der Schüler zunächst nicht im Zweifel gelassen wird, was das Neue ist, das er lernen und üben soll, bei welchem aber jeder folgende Fortschritt mit der Anwendung und Wiederholung von Früherem behufs erneuter Einprägung und dauernden Festhaltens verbunden ist, entspricht durchaus gesunden pädagogischen Grundsätzen.

Die Aufgabensammlung soll ebenso den didaktischen Forderungen des allmählichen und gleichmäßigen Fortschrittes vom Leichteren zum Schwereren, sowie vom Besonderen zum Allgemeinen gerecht werden, soweit dies die Rücksicht auf das mangelhafte Verständnis noch ungereifter Schüler notwendig macht. Sodann muß sie hinreichend reichhaltig sein. Diese letztere Forderung bezieht sich weniger auf die Menge der zu behandelnden Gebiete, denn diese ist durch den Unterrichtsplan und das Lehrbuch gegeben, und es ist selbstverständlich, daß zu jedem Abschnitte, welcher gelehrt wird, auch Übungsmaterial vorhanden sein muß. Es handelt sich vielmehr um die hinreichende Anzahl von Aufgaben für jeden solchen Abschnitt, damit der Lehrer nicht in die Lage komme, den Inhalt seiner Sammlung erschöpft zu haben, ehe auch die schwächeren Schüler zu nutzbringendem Weiterarbeiten befähigt sind. In dieser Beziehung ist zu wünschen, daß nicht zu rasch zu schwierigeren und komplicierteren Übungen fortgeschritten werde, vielmehr sollen gerade die leichteren Aufgaben in reichlicher Anzahl vorhanden sein. Wenn bei einem Schülerjahrgange dann auch

die vollständige Bearbeitung derselben unnötig oder gar langweilig erscheinen sollte, so steht ja dem Überschlagen eines Teiles nichts im Wege, und es kann der letztere dann immerhin zu einer Abwechselung bei verschiedenen Cöten benutzt werden.

Die Reichhaltigkeit einer Aufgabensammlung zeigt sich ferner in der Vielseitigkeit der herangezogenen Übungen. Ein solches Buch kann trotz einer übergroßen Anzahl einzelner Nummern doch in diesem Sinne sehr arm an Inhalt sein. Es sollen also möglichst vielseitige Wiederholungen von früher Gelerntem wechselnd vorkommen, und ferner bei eingekleideten Aufgaben möglichst zweckmäßig gewählte und verschiedenartige Gebiete herangezogen werden. Das letztere gilt besonders bei den eingekleideten Aufgaben zur Algebra. Vgl. § 33.

An arithmetischen Aufgabensammlungen, welche die vorstehend gestellten Forderungen mehr oder minder erfüllen, hat unsere deutsche Schullitteratur keinen Mangel; einzelne der im Nachstehenden angeführten gehören infolge vortrefflicher Eigenschaften zu den am meisten gebrauchten Schulbüchern. Wir nennen die folgenden:

1. Heis, Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgem. Arithmetik u. s. w. Köln, Du Mont-Schauberg.
2. Bardey, Methodisch geordnete Aufgabensammlung über alle Teile der Elementararithmetik u. s. w. Leipzig, B. G. Teubner.
3. Meier Hirsch, Sammlung von Beispielen u. s. w. aus der Buchstabenrechnung und Algebra, herausg. von Bertram. Altenburg, Pierer.
4. Reidt, Aufgabensammlung zur Arithmetik und Algebra. Berlin, G. Grote.
5. Bardey, Arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik, vorzugsweise für Realschulen II. O., Gewerbeschulen und höhere Bürgerschulen. Leipzig, Teubner.
6. Dränert, Sammlung arithmetischer Aufgaben für den Gebrauch an höheren Bürgerschulen. Altenburg, Pierer.
7. Schubert, Sammlung von arithmetischen und algebraischen Fragen und Aufgaben. 2 Teile. Potsdam, Stein.
8. Heilermann und Diekmann, Lehr- und Übungsbuch für den Unterricht in der Algebra u. s. w. 3 Teile. Essen, Bädeker.
9. Hofmann, Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. Bayreuth, Grau.

Die drei ersten dieser Übungsbücher sind ohne Bezugnahme auf ein bestimmtes Lehrbuch verfaßt und nach Umfang und Reichhaltigkeit des Inhaltes auf den Gebrauch an den am weitesten gehenden Schulen eingerichtet. Zu dem Buche von Heis sind mehrere an dasselbe anschließende Schriften anderer Verfasser erschienen, so

Matthiessen, Schlüssel zur Sammlung von Beispielen u. s. w. von Heis. Köln, Du Mont-Schauberg, und

Neumann, Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik und Algebra. Theoretischer Leitfaden zu Heis' Sammlung. Leipzig, Langewiesche.

Auch das arithmetische Lehrbuch von Boymann (vgl. S. 87) ist mit Rücksicht auf die Heissche Sammlung verfaßt. Endlich existieren verschiedene Bücher, welche die Auflösungen zu der letzteren enthalten, deren spezielle Anführung jedoch hier nicht nötig sein wird.

Nr. 2, das größere Bardeysche Werk, zeichnet sich durch eine große Anzahl von Aufgaben, namentlich auf dem Gebiete der algebraischen Gleichungen aus und ist, wie Nr. 1, in weiten Kreisen bekannt. Für weitergehende Studien schließen sich an dasselbe mehrere Schriften desselben Verfassers an, welche in gleichem Verlage erschienen sind: Algebraische Gleichungen — Quadratische Gleichungen — Zur Formation quadratischer Gleichungen.

Über Nr. 3, eine Neubearbeitung des altehrwürdigen Buches von Meier Hirsch, findet sich u. a. eine Recension in der Zeitschr. f. math. u. naturw. Unt. III, 37.

Das unter 4. angeführte Werk soll ebenfalls allgemeineren Zwecken dienen, ist aber zugleich mit besonderer Rücksicht auf des Verfassers „Elemente der Mathematik, erster Teil: Arithmetik und Algebra, Berlin, G. Grote", verfaßt. Vgl. S. 86.

Nr. 5 und 6 sind für Schulen besonderer Art bestimmt, wie oben auf den Titeln (noch nach der alten Benennungsweise der Anstalten) angegeben ist. Das Buch von Dränert ist im Anschluß an Meier Hirsch bearbeitet, das von Bardey enthält zugleich den theoretischen Lehrgang, indem es jedem Abschnitt den dazu gehörigen Teil desselben vorausschickt.

Ebenso ist Nr. 8 ein Lehrbuch der Arithmetik mit unmittelbarer Beifügung des Übungsstoffes zu den einzelnen Abschnitten. Da dasselbe allgemein für höhere Schulen jeder Art dienen soll, und den Gegenstand eingehend behandelt, so besitzt es einen nicht unbedeutenden äußeren Umfang.

Ein ganz ausgezeichnetes Hilfsbuch ist auch Nr. 7, die in zwei Teilen ausgegebene Sammlung von Schubert. Dieselbe besitzt manche hervorragende Eigentümlichkeiten und verrät an zahlreichen Stellen den genauen Kenner der praktischen Bedürfnisse der Schule. Derselbe Verf. hat auch einen systematischen Leitfaden herausgegeben. (Vgl. § 22.)

Nr. 9 kennzeichnet sich durch eine Reihe von Auflagen als ein ebenfalls viel gebrauchtes Buch und ist deshalb hier angeführt worden, obgleich es dem Verf. des vorliegenden nicht näher bekannt ist. Bei der großen Anzahl der mathematischen Schulbücher ist die Kenntnis jedes einzelnen nicht gut möglich. Deshalb unterlassen wir auch die Angabe noch weiterer Beispiele aus der größeren Anzahl arithmetischer Übungsbücher, welche bisher erschienen sind und auch hier und da gebraucht werden.

§ 28. Die Behandlung der vier Species.

Addition und Subtraktion.

Die Art der (genetischen) Entwickelung des Begriffs der Zahl und der einzelnen Operationen, sowie diejenige der Beweisführung der Lehrsätze ist dem Anfänger im Unterrichten im wesentlichen durch das an der Schule eingeführte Lehrbuch vorgeschrieben, dem er sich so genau als möglich anzuschließen hat, um keine Verwirrung bei den Schülern hervorzurufen.

Soweit das Lehrbuch hierin Freiheit der Bewegung gestattet, mögen folgende Regeln als zweckdienlich beachtet werden:

Bei den Beweisen der Formeln für die Addition und Subtraktion quäle man sich und die Schüler nicht mit jenen künstlichen oder weithergeholten Beweisen, welche aus dem an sich richtigen Streben nach vollendeter wissenschaftlicher Strenge hervorgegangen sind, dem jungen Schüler aber Schwierigkeiten des Verständnisses bieten, ihm mehr oder minder als Kunststücke erscheinen, und welche zwar die Richtigkeit des Satzes nachweisen, nicht aber zugleich zur Einsicht in den inneren Grund dieser Richtigkeit führen. Ist z. B. die Formel

$$a - (b - c) = a - b + c$$

zu beweisen, so ist es ja sachlich völlig richtig, wenn man zu beiden Seiten der Gleichung $b - c$ addiert und links die vorher bewiesene Formel $a - b + b = a$, rechts die ebenfalls vorausgegangene $a + (b - c) = a - c + b$ anwendet, also

$$a - b + c + (b - c) = (a - b + c) - c + b = (a - b) + b = a$$

rechnet, und aus der Identität der Seiten der neuen Gleichung auf die Richtigkeit der ursprünglichen schließt. Wo das Lehrbuch eine solche Beweisführung vorschreibt, wird man jedoch gut thun, dieselbe wenigstens ihres mechanischen Charakters durch Ausführungen, wie etwa die folgende, zu entkleiden:

$a - (b - c)$ ist eine Differenz, a ihr Minuend, $b - c$ ihr Subtrahend. $a - (b - c)$ ist also nach der Erklärung der Differenz ein Zeichen für diejenige Zahl, zu welcher $b - c$ addiert werden muß, um a zu erhalten. Die Formel behauptet, daß $a - b + c$ dieser Zahl gleich sei; es ist also zu beweisen, daß

$$a - b + c + (b - c) = a$$

ist. Hierauf folgt dieser Nachweis in der oben angegebenen Art. — Es bedarf hierbei wohl nicht der erneuten Bemerkung, daß auch hier die vorstehenden einzelnen Aussagen durch Fragen erzielt werden sollen.

Die Beweisführung ist aber auch in diesem Falle noch immer keine genetische; der Lehrsatz wird als von anderer Seite fertig gegeben hingestellt und nachträglich bewiesen; dieser Beweis endlich bewirkt

nur Überführung (convictio), aber nicht Einsicht (cognitio). Überzeugender und für Anfänger hinreichend evident ist folgendes Verfahren: Der Satz tritt zunächst infolge der genetischen Anordnung der Untersuchungsgebiete als Aufgabe auf: Wie kann eine Differenz von einer Zahl subtrahiert werden? Die Antwort lautet: Sollen $b - c$ Einheiten von a Einheiten weggenommen werden, und subtrahiert man zuerst b von a, so hat man c Einheiten mehr abgezogen, als verlangt war, und muß daher die gleiche Anzahl zum Schluß hinzuzählen. Daher ist — u. s. w.

Damit eine solche Beweisführung nicht für kaum mehr, als eine Umschreibung des Satzes in Worten angesehen werden könne, ist nur nötig, daß dem Schüler schon vorher, bei der Erklärung der Differenz, die Folgerung entwickelt sei, daß eine Differenz bei unveränderlichem Minuendus und wachsendem Subtrahendus entsprechend kleiner werde und umgekehrt, oder populär gesagt daß, wenn man mehr abziehe, ebensoviel weniger übrig bleibe und umgekehrt.

Wenn in dieser Weise überhaupt die genetische Untersuchung der Frage vorausgegangen ist, wie eine Differenz ihren Wert ändert, wenn das eine oder das andere Glied derselben als veränderlich, d. h. um eine bestimmte Anzahl von Einheiten wachsend oder abnehmend betrachtet wird, so sind allerdings die einzeln nachfolgenden Rechnungsregeln nur eine Fixierung des Resultats für die besonderen Fälle, und ihr sogenannter Beweis kann nur eine Darlegung der Übereinstimmung ihres Inhaltes mit dem Ergebnis jener Voruntersuchung sein. —

Die Schwierigkeit, welche dem Anfänger die Abstraktion von dem besonderen Zahlenwert bei dem Gebrauche der Buchstaben als allgemeiner Zahlzeichen bereitet, wird es in der Regel nötig machen, daß der Ableitung und dem Ausspruche eines Satzes in allgemeiner Form eine Erläuterung an bestimmten Zahlenbeispielen vorhergehe. Man verschmähe hierbei dem schwachen Verständnis unbegabter Schüler gegenüber auch eine Popularisierung durch Einkleidungen verschiedener Art nicht. So kann man z. B. in dem vorstehenden Falle die Untersuchung mit folgenden Fragen beginnen: A besitzt 10 *M*, ist aber dem B 7 *M* schuldig; zugleich schuldet B an A 4 *M*. Wieviel hat also A an B von den 10 *M* abzugeben? Wenn nun A dem B die vollen 7 *M* gegeben hat, was muß dann geschehen, damit die Rechnung wieder richtig wird? Wie kann man also $10 - (7 - 4) = 10 - 3$ noch anders rechnen?

Ist dann der Satz verstanden und in allgemeiner Form ausgesprochen (vgl. § 17, S. 61) und bewiesen, so hat — wie schon früher bemerkt — sogleich seine Anwendung und Einübung an den betreffenden Beispielen der Aufgabensammlung nachzufolgen.

Hierbei sind zunächst wieder Beispiele in bestimmten Zahlen nützlich, welche zugleich den Gebrauch des Gelernten im praktischen Rechnen erläutern und üben, also z. B. für den vorstehenden Satz

Aufgaben, welche die Berechnung von Exempeln wie 31 — (15 — 9) oder 1463 — (469 — 219) auf verschiedene Arten, sodann solcher wie 324 — (124 — 12), 1826 — (826 — 719) auf die kürzeste Art verlangen und dabei zugleich dazu dienen, die in den früheren Klassen erworbene Fertigkeit im praktischen Rechnen (sowohl im mündlichen, wie im schriftlichen) zu erhalten. Dann folgen Beispiele mit Buchstaben, wie $17a - (13a - 5b)$ oder $4163a - (999a - 3124b)$, endlich solche, in denen die Regel wiederholt gebraucht wird und solche, in denen auch frühere Sätze zur Anwendung kommen, wie z. B.

$$1764a - (315a - 2169b) + (3148a - 2069b) + 15a.$$

Hierbei hat der Lehrer im Anfange stets die Begründung der einzelnen Umformungen angeben zu lassen, also etwa bei der Aufgabe

$$17x + 18y - 18y - (9x - 5y)$$

folgende Fragen zu stellen: Was soll zuerst geschehen? Was erhält man, wenn man von einer Summe einen ihrer Summanden subtrahiert? Was also für $17x + 18y - 18y$? Was soll nun in $17x - (9x - 5y)$ geschehen? Wie wird hier eine Differenz von einer Zahl subtrahiert? Was erhält man also?

Allmählich müssen die Schüler lernen, in dieser Weise den Gang einer Rechnung auch ohne Fragen, also selbständig anzugeben und demnach z. B., wie folgt, zu sprechen oder zu schreiben:

$$18a - (18a - 9b) - (3b - 4c).$$

Subtrahiert man eine Differenz von ihrem Minuenden, so erhält man den Subtrahenden, also ist $18a - (18a - 9b) = 9b$ und es bleibt zu berechnen:

$$9b - (3b - 4c).$$

Hier soll eine Differenz von einer Zahl subtrahiert werden, und dies kann dadurch geschehen, daß man den Minuendus von der Zahl subtrahiert und zum Rest den Subtrahendus addiert; also erhält man

$$(9b - 3b) + 4c$$

oder

$$6b + 4c.$$

Solche Übungen eignen sich vorzugsweise für die leichteren Aufgaben, welche in den Unterrichtsstunden mündlich, d. h. ohne zu schreiben, behandelt werden. Bei den für die häusliche Übung aufzugebenden schriftlichen Lösungen würde die jedesmalige Hinzufügung der Begründung in der angegebenen Weise zu weit führen. Hier genügt die richtige Aufeinanderfolge der in ordentlicher Weise unter einander geschriebenen einzelnen Gleichungen oder, in besonderen Fällen, etwa bei zur Specialkorrektur des Lehrers abzuliefernden Heftarbeiten, die Beifügung der Nummer, welche die gebrauchte Formel im Lehrbuche hat. So dürfte z. B. für eine gewöhnliche Hausaufgabe folgende schriftliche Form genügen:

$$\begin{aligned}
&\underline{1764a - (315a - 2169b) + (3148a - 2069b) + 15a.}\\
&1764a - 315a + 2169b + (3148a - 2069b) + 15a.\\
&1449a + 2169b + (3148a - 2069b) + 15a.\\
&1449a + 2169b + 3148a - 2069b + 15a.\\
&1449a + 3148a + 2169b - 2069b + 15a.\\
&4597a + 2169b - 2069b + 15a.\\
&4597a + (2169b - 2069b) + 15a.\\
&4597a + 100b + 15a.\\
&4597a + 15a + 100b.\\
&4612a + 100b.
\end{aligned}$$

Sobald die Schüler in dieser Weise hinreichend geübt sind, wird bei den folgenden Exempeln die Begründung weggelassen und außerdem die gleichzeitige Vornahme zweier oder mehrerer Umformungen, mit thunlichstem Rechnen „im Kopfe" gepflegt, um auch die nötige Gewandtheit und Raschheit des Arbeitens zu erzielen. So notwendig es ist, Schritt für Schritt zu gehen, so lange die Kraft des Schülers noch nicht hinreichend erstarkt ist, ebenso verkehrt würde es sein, ihm diesen schrittweisen Gang noch da aufzuzwingen, wo er zu rascherem Ausschreiten befähigt ist. Unnütze Zeitverschwendung, Hervorrufung von Langeweile mangels hinreichender Anregung und Anstrengung der vorhandenen Kraft, endlich ungenügende Übung in raschem Überblick und gewandter Beherrschung der Aufgabe würden die Folgen davon sein. Aber auch dieses raschere Ausschreiten kann nicht mit einemmale in voller Fertigkeit verlangt, sondern muß ebenfalls stufenmäßig geübt werden.

Man kann die sorgfältige Einübung aller Einzelregeln der Addition und Subtraktion für unnötig, ja für Zeitvergeudung erklären, weil dieselben ja bald darauf nach der Einführung der negativen Zahlen und der algebraischen Summen durch ein anderes und kürzeres Verfahren ersetzt würden. Wer die Arithmetik nur des praktischen Könnens wegen, also als Fertigkeit betreibt, wird dieser Ansicht unbedingt zustimmen können, wer aber in der Beschäftigung mit den einzelnen Sätzen derselben auch Denkübungen sieht, wird anders urteilen müssen. Denn jede solche Übung muß gründlich sein, und es darf nur dann zu einer neuen übergegangen werden, wenn der Inhalt der vorhergehenden und ihre Stellung in der Gesamtentwickelung des Lehrgebäudes hinreichend klar erfaßt und eingeprägt ist. Dazu gehören an dieser Stelle auch Beispiele in nicht zu geringer Anzahl. Anderenfalls dürfte man die Erfahrung machen, daß über der späteren alleinigen Anwendung der kürzeren Methoden der Unterbau, auf welchem dieselben ruhen, ins Wanken gerät.

Die Einführung der negativen Zahlen, dieser Stein des Anstoßes für manche Theoretiker, ist praktisch ganz leicht, wenn man nur darauf verzichtet, dem Schüler abstrakte Definitionen zu geben, für welche er auf der betreffenden Altersstufe noch nicht reif ist. Hier gilt

ganz besonders das Wort: exempla docent. Auf die Frage, kann man 7 von 4 subtrahieren, werden die Schüler zuerst ohne Besinnen mit nein antworten; die Frage, kann jemand, der 4 Mark besitzt, ein Buch für 7 Mark kaufen, wird sie schon stutzig machen, und die weitere Frage, wieviel er übrig behalte, wird bereits die Antwort finden: Nichts, aber er bleibt 3 Mark schuldig. Was muß er nun thun, wenn er wieder Geld bekommt, fragen wir weiter, und gelangen so auf die Vorstellung von 3 Mark, welche abzutragen, zu subtrahieren sind, und die wir demgemäß mit — 3 *M.* bezeichnen. Verfasser weiß wohl, daß das Beispiel von Schulden und Vermögen wegen verkehrter Anwendung bei der Multiplikation lächerlich gemacht worden ist; ein solcher verkehrter Gebrauch darf jedoch nicht hindern, es in der richtigen Weise als eines der besten für den Unterricht zu benutzen. — Ob jener Jemand das nötige Geld erst später einnimmt, oder ob er es zu Hause liegen und nur nicht im Portemonnaie mitgebracht hat, ist ferner für die Rechnung ganz gleichgiltig. Bleibt er einstweilen die 3 Mark schuldig, so hat er sie als „negative" zu buchen, wenn er eine Übersicht über sein Vermögen haben will. Die Rechnung des Kaufmanns, welche auf der einen Seite seine Ausstände, auf der anderen seine Schulden aufzählt, besteht aus zweierlei Zahlen, solchen durch deren Vermehrung auch sein Vermögen sich vermehrt, und solchen durch deren Vermehrung es sich vermindert. — Kann jemand, der in einer Hausflur am Fuße der Treppe steht, vier Stufen hinauf und dann wieder sieben Stufen herabsteigen? Wie aber, wenn die Treppe vom Hausflur noch weiter abwärts, in den Keller, führt? Wo steht er nun? Was muß er thun, um wieder ans Tageslicht zu kommen? Ähnliche Beispiele bieten die Wärme- und Kältegrade des Thermometers, zukünftige und vergangene Zeit (Berechnung der Zeitunterschiede von Ereignissen vor und nach Christi Geburt), Schritte nach vorwärts und nach rückwärts, u. dgl. m. Auf einer geraden Linie sind Punkte in gleichen Abständen von einander angegeben. Man wählt einen Punkt, etwa in der Mitte, als Anfangspunkt und soll die Entfernungen der anderen von ihm angeben. Man zählt also nach rechts die Entfernungen 1, 2, 3, . . . Kann man den Punkt mit der Entfernung 4 suchen, und dann von ihm um 7 Einheiten zurückgehen? Wohin gelangt man?

Durch solche Beispiele erhält der Schüler eine vorerst hinreichende und hinlänglich klare Vorstellung von dem Gegensatze der relativen Zahlen, auf welcher sich dann weiter aufbauen läßt. Später mag ein Repetitionskursus ihn dahin führen, daß er auch lerne, die Begriffe in genau formulierten und verstandenen Sätzen zu definieren.

§ 29. Multiplikation und Division.

Die Aufstellung und Einübung der Sätze über Multiplikation und Division geschieht in ähnlicher Weise wie bei den Operationen

der ersten Stufe. Ein genauer Lehrgang im einzelnen soll hier so wenig wie dort vorgeschrieben werden; man kann dasselbe Ziel auf verschiedenen Wegen erreichen, und die Ansichten darüber, welcher der beste sei, können geteilt sein. Es ist auch für den jungen Lehrer recht nützlich, wenn er genötigt ist, sich seinen Lehrgang an der Hand des Lehrbuchs im einzelnen selbst auszuarbeiten. Nur auf einige prinzipielle Punkte möge aufmerksam gemacht werden.

Der Unterschied in der Bedeutung der beiden Faktoren eines Produkts hebt sich deutlicher hervor, als derjenige zwischen den beiden Summanden einer Summe; daher sind auch die getrennten Benennungen Multiplikator und Multiplikand gebräuchlicher als im anderen Falle die Namen Addend und Augend. Es rührt dies wesentlich daher, daß die beiden Summanden in den Anwendungen stets gleichartige Größen sind, während bei der Multiplikation nur der Multiplikandus eine benannte Zahl sein kann. Infolge dessen scheiden sich auch die beiden Umkehrungen der Multiplikation in der Praxis schärfer von einander als die beiden Subtraktionen. Zwar sind auch diese letzteren in Handel und Wandel neben einander im Gebrauch, man subtrahiert z. B. den Preis einer Ware von 7 *M.* von dem hingelegten Betrage von 10 *M.* nicht bloß, indem man zum Summenwerte 10 und dem Addenden 7 den Augenden sucht, also um 7 rückwärts zählt, sondern auch indem man zu 7 so viel zuzählt, bis man 10 erhält, also zu der Summe und dem Augenden den Addenden sucht. In den Schulen wird jedoch immer nur eine von beiden Subtraktionsmethoden gelehrt, und es ist, nebenbei bemerkt, zu bedauern, daß man im deutschen Reiche meist die vorher zuerst genannte, und nicht, wie in Österreich, die zweite gewählt hat. Denn diese besitzt in der Anwendung verschiedene Vorzüge, wie z. B. die schon gleich im Anfange auftretende Vermeidung des sogenannten Borgens. Man prüfe die Sache nur vorurteilsfrei und gründlich, und man wird gewiß die gegenwärtig vereinzelt auftretenden Bestrebungen, bei uns einen Wandel zu schaffen, gutheißen.

Bei der Division verhält sich die Sache etwas anders. Hier hat die Unterscheidung der beiden inversen Operationen für die praktische Ausführung im Rechenunterricht keine Bedeutung (nur diejenige der beiden Subtraktionen kommt auch hier zur Anwendung), dagegen ist umsomehr die begriffliche Auseinanderhaltung geboten. Die Aufgabe, zu dem Werte 12 Meter eines Produkts und dem Multiplikandus 4 Meter den Multiplikator zu suchen, also anzugeben, wie oft 4 Meter in 12 Metern enthalten sind, oder in welchem Verhältnis 12 Meter zu 4 Meter stehen, ist leicht zu unterscheiden von der anderen, zu dem Werte des Produkts, 12 Meter, und dem Multiplikator 4 den Multiplikand suchen, also anzugeben, wieviel der vierte Teil von 12 Metern beträgt. Bei den entsprechenden Konstruktionsaufgaben, eine Strecke durch eine andere zu messen, und eine Strecke in eine verlangte Anzahl gleicher Teile zu teilen, ist auch die Ausführung der Operation

durchaus verschieden. Es sind daher von vornherein die zwei Divisionen zu unterscheiden, und wir nennen die eine Messen, die andere Teilen. Entsprechend erhalten auch die beiden Arten des Quotienten verschiedene Namen, die erstere heißt Verhältnis, die andere Teil. Wegen $a . b = b . a$ unterliegen dieselben aber denselben allgemeinen Gesetzen, und letztere werden daher auch für beide gemeinschaftlich behandelt.

Über den hierbei festgestellten Begriff des (geometrischen) Verhältnisses sind Meinungsverschiedenheiten entstanden. Es wird aber trotz aller abweichenden Versuche, diesen Begriff zu erklären, dabei bleiben müssen, daß das Verhältnis das Ergebnis der Vergleichung zweier gleichartigen Größen durch Division, also ein Quotient ist.

Dabei ist allerdings noch eine Vereinbarung in betreff des Begriffes eines Quotienten, ebenso wie der Summe, Differenz, des Produktes u. s. w. erforderlich, insofern hierbei die betreffende Zahlenverbindung und das Resultat der Ausrechnung derselben zu unterscheiden sind. Jedermann nennt z. B. $3 + 4$ eine Summe, man sagt aber auch im praktischen Rechnen, die Summe von 3 und 4 sei 7. Hier ist offenbar eine Zweideutigkeit, denn man kann fragen, was denn nun eigentlich die Summe sei, der Ausdruck $3 + 4$ oder die Zahl 7? Nun wird aber niemand diese letztere Zahl, wenn sie für sich allein steht, eine Summe nennen können, sondern nur, wenn er zugleich die bestimmte Entstehungsweise aus 3 und 4 in Gedanken damit verbindet. Sonst könnte 7 ebenso gut eine Differenz u. s. w. heißen, da sie ja auch aus $9 - 2$ oder anderen Zahlenverbindungen entstanden sein kann. Dies spricht also dafür, daß unter der Summe der Ausdruck, nicht das Resultat zu verstehen sei. Die Zweideutigkeit der Ausdrucksweise muß aber unbedingt gehoben werden, da man sonst einen Mangel an Präcision derselben nicht in allen Fällen vermeiden kann, und der Weg dazu ist durch anderweiten Gebrauch klar vorgezeichnet. Die Gleichung $a + b = c$ zeigt uns denselben in dem Worte „gleich". Die obige Sprechweise, daß die Summe von 3 und 4 sieben sei, ist hiernach nur als eine der Bequemlichkeit entsprungene Abkürzung für „die Summe von 3 und 4 ist g l e i c h 7" anzusehen. Wir unterscheiden also die Summe und den W e r t derselben, und damit ist jede Schwierigkeit gehoben. Die Summe $a + b$ ist also z. B. nicht dasselbe, wie die Summe $b + a$, denn in beiden wird ein verschiedener Gang der Rechnung vorausgesetzt, dagegen sind ihre W e r t e einander gleich, und nur dies sagt die Gleichung $a + b = b + a$. — Nun läßt sich aber bei Buchstabengrößen der Wert der Summe häufig nicht durch Ausführung der Rechnung ermitteln, man hat deshalb hier die Einschließung von $a + b$ in eine Klammer zur Unterscheidung des Wertes von dem Ausdruck angewendet, und da es häufig nicht nötig ist, diese Unterscheidung ausdrücklich zu machen, weil die Bedeutung aus dem Zusammenhang hervorgeht und ein Mißverständnis nicht möglich ist, so hat man in

solchen Fällen der Kürze halber diese Klammer auch weggelassen. Unter gleicher Voraussetzung wird auch der Name Summe zur Abkürzung statt Wert der Summe gebraucht. Solche Bequemlichkeiten dürfen aber nicht zur Verschmelzung oder Verwechselung zweier nicht identischen Begriffe dienen. Oder wie nennen etwa diejenigen, welche in $3+4=7$, mit dem Worte Summe die Zahl 7 bezeichnen, den Ausdruck $3+4$?

Das hier für die Addition Gesagte gilt entsprechend für alle übrigen Operationen. So unterscheiden wir also auch bei der Division den Quotienten von dem Werte desselben. In diesem Sinne ist das Verhältnis ein Quotient, und man hat daher auch das Recht von einem Werte des Verhältnisses zu reden, für den man früher den nicht passend gewählten besonderen Namen Exponent gebrauchte.

Die Multiplikation von relativen Zahlen ist vielfach Gegenstand methodischer Erörterungen und kritisierender Anfeindung geworden. Die Frage, um welche es sich handelt, ist hauptsächlich die, ob beispielsweise der Satz $(-a).(-b)=+ab$ auf einem Beweise oder auf einer Definition beruhe. Daß man einfach sage: „Wir setzen fest, daß $(-a).(-b)=+ab$ sein solle", das geht weder in der Wissenschaft noch in der Schule an, denn reine Willkür ist hier doch nicht am Platze. Selbst der Schüler muß einsehen, daß eine solche Definition nicht aus irgendwie freiem Belieben hervorgegangen sein könnte, sondern daß man dieselbe nur so und gar nicht anders aufstellen durfte. Wenn aber $(-a).(-b)$ gar nichts anderem als $+ab$ gleichgesetzt werden kann (oder ihm Gleichwertigem), so ist die Gleichung eine notwendige Folge des Vorausgehenden, und also ein Lehrsatz. Die Schwierigkeit rührt daher, daß die Definition des Produkts als einer Summe gleicher Summanden nur den einfachsten Fall des Produktes behandelt, also zu eng ist und daher einer Erweiterung bedarf. An der vorliegenden Stelle tritt das Bedürfnis einer solchen Erweiterung zuerst auf, und hier, an der Wurzel der Schwierigkeit, nicht an dem aus der verallgemeinerten Definition nachher abzuleitenden Satze, ist der Hebel anzusetzen. Die Frage endgiltig wissenschaftlich zu entscheiden, soll hier nicht versucht werden, für uns handelt es sich nur darum, einen Vorschlag dafür zu machen, wie etwa eine solche Erweiterung des Produktbegriffes in der Schule so vorgenommen werden könne, daß sie den Schülern verständlich wird. Folgendes Verfahren dürfte sich empfehlen:

Multiplicieren heißt (auch nach der ersten Erklärung) aus einer Grundzahl a (dem Multiplikanden) eine Reihe neuer Zahlen gebildet denken, von denen jede folgende um a Einheiten größer ist als die ihr zunächst vorhergehende, und dann aus dieser Reihe ein durch seine Stellenzahl bestimmtes Glied angeben. Wird eine solche Reihe von Zahlen, z. B.

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, \\ 3, & 6, & 9, & 12, & 15, \ldots \end{array}$$

nur nach einer Seite der Grundzahl 3 entwickelt gedacht, so hat ein Produkt, wie 3 . (— 4), in derselben keine Stelle, eine Summe aus — 4 Summanden hat keinen Sinn. Ganz ebenso, wie bei der Reihe der natürlichen Zahlen der Anfangspunkt der Zählung in derselben verschoben werden konnte, sodaß man zu Zahlen gelangte, welche kleiner als die gewählte Einheit waren, d. h. zur Null und zu den negativen Zahlen, ganz in derselben Weise kann dies auch hier geschehen. Setzt man aber eine solche Reihe von dem Anfangsglied aus auch rückwärts fort, ohne an ihrem Bildungsgesetz etwas zu ändern, so ist man durch die Konsequenz der Bezeichnungsweise gezwungen, die Grundzahl a als erstes Glied $= a \,.\, 1$, die ihr vorhergehende 0 als nulltes Glied $= a \,.\, 0$, die zweitvorhergehende $- a$ als $- 1^{\text{tes}}$ Glied $= a \,.\, (-1)$ zu setzen, u. s. w. Daher erhält nun das Produkt $a \,.\, (-b)$ die Bedeutung $- ab$.

Die neue Definition der Multiplikation, welche die alte einschließt, lautet also dahin: Multiplicieren heißt aus der nach dem obengenannten Gesetze aus dem Multiplikandus gebildeten (nach beiden Seiten unendlichen) Reihe ein Glied von bestimmter (positiver oder negativer) Stellenzahl angeben.

Hieraus ergeben sich dann leicht alle hierher gehörigen Rechnungsregeln.

Das Vorstehende prätendiert, wie gesagt, nicht, eine endgiltige Lösung des Problems zu sein, sondern nur ein Vorschlag. Wer andere Wege für besser hält, z. B. die Anwendung der Richtungsänderung in der Zahlenlinie durch Drehung, möge diese einschlagen und den Erfolg prüfen.

Für die Division durch Null bedarf der Unterricht an dieser Stelle nur der Entwickelung des Satzes: „Durch Null kann man nicht dividieren." Daß $\frac{0}{0}$ unendlich vieldeutig, und daß $\frac{a}{0} = \infty$ nichts als ein abgekürzter Ausdruck für den Satz ist: Je mehr sich der Divisor der Null nähert, desto größer wird der Wert des Quotienten, und dieser wächst über jede denkbare Grenze hinaus, wenn jener in entsprechender Weise sich bis zum Verschwinden verkleinert, dies kann dabei erläutert werden, ohne daß man deshalb nötig hat, den Schülern schon auf dieser Stufe die Feststellung und Unterscheidung der Begriffe „konstante und werdende Null" (nach einem neueren Lehrbuche) zuzumuten.

Eine neue Erweiterung des Zahlbegriffs tritt auf dem vorliegenden Gebiete mit der Einführung der gebrochenen Zahlen auf. Wie dieselbe in einfacher Weise durch die Annahme der Teilbarkeit der Einheit ausgeführt wird, ist allbekannt und ohne didaktische Schwierigkeit. Die Schüler kennen den neuen Begriff bereits praktisch aus der Bruchrechnung; dies schließt aber nicht aus, daß er ihnen hier auch theoretisch und in seinem Zusammenhange mit dem übrigen klar gemacht werden muß. Die Gesetze des Rechnens mit Zahlen der neuen Art erledigen sich leicht durch den Nachweis, daß dieselben mit denjenigen für Quotienten übereinstimmen.

An welche Stelle des arithmetischen Unterrichts die Proportionen zu setzen sind, kann unentschieden bleiben. Als eine besondere Art von Gleichungen, welche nur wegen ihres überaus häufigen Vorkommens aus den übrigen hervorgehoben und ausführlicher behandelt zu werden pflegen, könnte man dieselben in die Algebra, zu den Gleichungen ersten Grades mit einer oder mehreren Unbekannten stellen; als passendes Übungsgebiet des Abschnitts von der Multiplikation und Division kann man sie zunächst auf diesen folgen lassen. Beides wird keinen großen Unterschied machen, wenn man der Ansicht zustimmt, daß auf die vier Species nicht unmittelbar die Operationen der dritten Stufe zu folgen haben, sondern daß man zunächst die Gleichungen ersten Grades mit einer und mit mehreren Unbekannten anschließt. Dies letztere entspricht dem Fortschritt vom Leichteren zum Schwereren und empfiehlt sich auch dadurch, daß die bis dahin gelernten Gesetze der vier Species an dem neuen Gebiete eine weitergehende Übung und Anwendung erhalten. — In dem vorliegenden Buche sollen jedoch die Gleichungen zusammenhängend besprochen werden. Vgl. § 32 u. ff. Man kann aber auch die besondere Behandlung der Proportionen an diejenige Stelle des Unterrichts setzen, an welcher sie ihre wichtigste Anwendung innerhalb desselben finden, nämlich unmittelbar vor die Lehre von der Ähnlichkeit im planimetrischen Unterricht. Man hat dann zu diesem Zwecke einige Stunden an dieser Stelle frei zu machen. Dieses Verfahren bringt den Vorteil, welchen jede unmittelbare Anwendung eines Gebietes für das Erlernen und Behalten desselben hat.

Den vier Spezies werden häufig noch einige leichte Sätze aus der Zahlenlehre, über absolute und relative Primzahlen, die gemeinschaftlichen Teiler und Multipla, sowie auch Sätze über die Zahlensysteme u. dgl angeschlossen. Es scheint ratsam, auf diesem Gebiete nicht über das Notwendige hinauszugehen, d. h. über dasjenige, was zum Verständnis, bezw. zur Begründung gewisser Regeln des praktischen Rechnens dient, oder was später, z. B. bei den inkommensurabelen Größen der Geometrie, Anwendung findet. Weiter reichende Lehren der Zahlentheorie sind meist für die Schüler zu abstrakt und daher zu schwer. Daß die Schüler einen richtigen Begriff von einem Zahlensystem bekommen, ist ebenfalls notwendig, dagegen dürfte es sich zu wenig lohnen, längere Zeit zur Ausführung von numerischen Rechnungsbeispielen in anderen Systemen als dem dekadischen zu verwenden. Die Zahlensysteme führen durch die Einheiten niederer Ordnungen auch zu einem richtigen Verständnis der Decimalbrüche; die praktischen Rechnungsregeln für die letzteren werden als aus dem Rechenunterricht bekannt vorauszusetzen sein. Die Erklärung der Einheiten von verschiedenen Ordnungen bildet endlich eine Vorübung zur Lehre von den Potenzen.

§ 30. Die Operationen der dritten Stufe.

Potenzieren und Radicieren.

Die Sätze über die Potenzen mit ganzen positiven Exponenten bieten keine didaktischen Schwierigkeiten; ihre Beweise ergeben sich fast unmittelbar aus der Definition der Potenz. Das Unterrichtsverfahren entspricht dem bei den vier Species angewendeten, nur wird man bei den Übungsbeispielen mit Rücksicht auf die schon gewonnene Befähigung etwas rascher fortschreiten können. Besonders aufmerksam zu machen ist darauf, daß für $(a \pm b)^n$ an dieser Stelle noch keine Umformung gegeben wird, und daß der Schüler sich davor zu hüten hat, als solche einem Analogieschluß zuliebe $a^n \pm b^n$ zu setzen, denn dieser Fehler wird sehr leicht gemacht. Es empfiehlt sich an dieser Stelle die Entwickelungen von $(a \pm b)^2$ und $(a \pm b)^3$ durch Multiplikation auszuführen und die Resultate merken zu lassen, wobei insbesondere klar gestellt wird, daß $(a + b)^2 > a^2 + b^2$ und $(a - b)^2 < a^2 + b^2$ ist. Man kann dies, wenn die betreffenden geometrischen Sätze bekannt geworden sind, auch durch Zeichnung auf verschiedene Arten veranschaulichen. Bei dem Pythagoreischen Lehrsatz z. B. erhält man $a^2 + b^2 = c^2$, aber $a + b > c$, also $(a + b)^2 > a^2 + b^2$.

Die erste größere Schwierigkeit entsteht bei den Potenzen mit Null, Eins und relativen Zahlen. Man darf auch hier sich nicht mit dem Notbehelf begnügen, daß man sagt, die Symbole a^0, a^1, a^{-b} hätten „eigentlich" keinen Sinn; um jedoch dieselben gebrauchen zu können, definiere man $a^0 = 1$, u. s. w. Denn der denkende Schüler wird fragen, ob diese Definition auf Willkür beruhe, ob man also auch ebensogut hätte anders festsetzen können, und wenn nicht, wodurch man genötigt sei, dies in der angegebenen Weise zu thun. Auch wird der bloße Zweckmäßigkeitsgrund, daß man jene Symbole, obgleich sie eigentlich keinen Sinn hätten, doch gebrauchen könne, manchem bedenklich erscheinen, der vielmehr folgern dürfte, wenn sie keinen Sinn haben, so darf man sie auch unter keinen Umständen gebrauchen. — Wir empfehlen deshalb hier ein ganz entsprechendes Verfahren, wie in dem analogen Falle bei der Multiplikation mit negativen Zahlen: Die Ausdrücke a^0, a^{-b} haben nur so lange keinen Sinn, als man die Definition der Potenz als eines Produktes gleicher Faktoren aufrecht erhält, sie bekommen einen solchen, sobald man diese Definition naturgemäß erweitert. Das Potenzieren, wie es bis dahin geübt worden, kann aufgefaßt werden als die Lösung der Aufgabe, aus einer Grundzahl a eine Reihe anderer Zahlen zu bilden, sodaß jede folgende $a$mal so groß ist, als die vorhergehende, und aus dieser Reihe ein durch seine Stellenzahl, den Exponenten, bestimmtes Glied anzugeben. Man kann nun auch in dieser Reihe das Anfangsglied verschieben, sodaß dasselbe nicht den absoluten Anfang derselben bildet, sondern auch vorausgehende Zahlen hat. (Man vergl. auch hier wieder die analoge Einführung des Begriffs

der negativen Zahl.) Man kann also die obige Reihe auch nach rückwärts fortsetzen, dem entsprechend den Begriff der Potenz erweitern, und findet, daß man notwendig $a^1 = a$, $a^0 = \frac{a}{a} = 1$, $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$ setzen muß. — Daß dann auch die Giltigkeit der bis dahin nur für ganze, positive Exponenten abgeleiteten Regeln auch für den erweiterten Begriff nachzuweisen ist, versteht sich von selbst, und diese Bemerkung möge hier auch für alle analogen späteren Fälle gemacht sein.

Bei der Umkehrung der Potenzierung tritt der Fall ein, daß die beiden inversen Operationen auch in der praktischen Ausführung nicht mehr vertauscht werden können. Dies ist des Zusammenhangs mit dem früheren wegen und zur Erklärung, warum jetzt zwei neue Rechnungsarten auftreten, von vorne herein hervorzuheben.

Bei dem Radicieren, welches nun zunächst für sich behandelt wird, sind die Beweise der Rechnungsregeln, dem vorgeschrittenen Standpunkt der Schüler entsprechend, streng wissenschaftlich zu geben. Der Satz selbst tritt hier, wie früher, bei genetischem Verfahren zunächst als Aufgabe auf: Um die Gesetze des Radicierens mit zusammengesetzten Ausdrücken zu ermitteln, lassen wir zuerst den Radikanden, dann den Wurzelexponenten nacheinander eine Summe, eine Differenz, ein Produkt u. s. w. sein. Wir fragen also, ob es möglich sei, solche zusammengesetzte Wurzelgrößen durch Radicierung mit oder an ihren Bestandteilen auszurechnen. Dies führt zuerst auf die Frage, ob $\sqrt[n]{a \pm b} = \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$ sei? Die Antwort muß sich selbstverständlich aus dem Begriff der Wurzel ergeben; hiernach lautet die Frage in ausgeführter Form: Ist diejenige Zahl, deren $n$te Potenz gleich $a \pm b$ ist, gleich $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$, oder noch anders, ist $\left(\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}\right)^n = a \pm b$? Die Frage wird verneint, und man gelangt zu der folgenden: Kann $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b}$ gesetzt werden? Dieselbe lautet umschrieben: ist $\sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b}$ gleich derjenigen Zahl, deren n^{te} Potenz gleich ab ist? Der Beweis hat also dadurch zu geschehen, daß das Produkt der beiden einzelnen Wurzeln mit n potenziert und als Resultat ab nachgewiesen wird. In dieser oder ähnlicher Weise können alle folgenden Formeln behandelt werden.

Zu einer neuen Schwierigkeit führt die Gleichung $\sqrt[n]{a^b} = a^{\frac{b}{n}}$, welche zunächst als nur unter der Bedingung bewiesen auftritt, daß $\frac{b}{n}$ eine ganze Zahl sei. Es entsteht die Frage, ob derselben auch im anderen Falle ein Sinn zukommen könne, und diese führt bekanntlich zu einer neuen Erweiterung des Potenzbegriffs und weiterhin zur Einführung der irrationalen Zahlen. Es handelt sich hier wieder darum,

wie diese begrifflich schwierige Partie Schülern verständlich gemacht werden könne. Wir schlagen folgendes Verfahren vor:

Soll $a^{\frac{b}{n}}$ berechnet werden, und bildet man zunächst a^b als ein Produkt von b gleichen Faktoren a, so hat man $n$mal so viele Faktoren gesetzt, als verlangt war. Man muß daher dieses Produkt wieder in n gleiche Faktoren zerlegen, d. h. man muß aus a^b die n^{te} Wurzel ausziehen, und einer dieser letzteren Faktoren ist gleich $a^{\frac{b}{n}}$ zu setzen. Ist nun b ein Vielfaches von n, so ist die Zerlegung des Produktes $aaaa\ldots$ in n gleiche Faktoren derart möglich, daß der einzelne Faktor wieder aus einer ganzen Anzahl von Faktoren a besteht. Ist aber b kein Vielfaches von n, so kann eine Zerlegung von $aaaa\ldots$ in n gleiche Faktoren dennoch möglich sein, sofern man sich die einzelne Größe a in geeignete Faktoren zerlegt denken kann. Zerlegt man z. B. jedes a in ein Produkt von n gleichen Faktoren, von denen also jeder gleich $\sqrt[n]{a}$ ist, so erhält man ein Produkt $\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{a}\ldots$ von bn Faktoren, und hat nun diese zu je b zusammenzufassen, damit a^b als ein Produkt von n gleichen Faktoren dargestellt sei. Daher ist die Erklärung, daß $a^{\frac{b}{n}}$ allgemein gleich $\sqrt[n]{a}^{\,b}$ oder $\sqrt[n]{a^b}$ zu setzen sei, eine notwendige und nicht eine willkürliche Erweiterung des Potenzbegriffes. Diese letztere beruht also mit anderen Worten darauf, daß in der obigen Reihe $\ldots, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, \ldots$ zwischen je zwei Glieder $n-1$ neue nach demselben Bildungsgesetze eingeschaltet werden können, in analoger Weise, wie bei der Einführung der gebrochenen Zahl $\frac{a}{n}$ zwischen je zwei Glieder der Zahlenreihe $\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ $n-1$ neue Zahlen eingeschaltet wurden. — In entsprechender Weise ergiebt sich, was allgemein unter einer Wurzel mit gebrochenem Exponenten verstanden werden muß.

Die vorstehende Erklärung scheint vorauszusetzen, daß die Basis a sich stets als ein Produkt von n gleichen ganzen oder gebrochenen Zahlen darstellen lasse, daß also $a = x^n$, und die Aufgabe $a^{\frac{b}{n}}$ nur eine Abänderung der Aufgabe $x^{\frac{bn}{n}}$ sei, wo also wieder vorausgesetzt ist, daß der Nenner des Exponenten ein Teiler des Zählers sei. Die Frage, was unter $a^{\frac{b}{n}}$ oder einfacher unter $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ zu verstehen sei, wenn auch diese Voraussetzung nicht zutreffe, führt auf die irrationalen Zahlen. Die Erläuterung derselben geschieht zweckmäßig mit Hilfe der Bestimmung des Verhältnisses inkommensurabeler Strecken und den mittelst Abtragen der kleineren von der größeren zu führenden Nachweis, daß in der Zahlenlinie Entfernungen vorkommen, welche sich durch

keine aliquoten Teile der Einheit ausdrücken lassen, welche aber nichts desto weniger reelle Werte besitzen. Die diskrete Zahlenreihe ist also durch Einfügung der ihr noch fehlenden irrationalen Zahlen zur kontinuierlichen Zahlenlinie zu vervollständigen. Man kann hierbei etwa von dem bekannten Beweise ausgehen, daß die Kathete und die Hypotenuse eines rechtwinkeligen und gleichschenkeligen Dreiecks inkommensurabel sind. Setzt man die Kathete gleich 1, so ist die Hypotenuse gleich $\sqrt{2}$, diese letztere Größe also nicht bloß durch eine bestimmte Länge dargestellt, sondern auch bewiesen, daß dieselbe durch keinen aliquoten Teil der Einheit, also überhaupt durch keine der bis dahin bekannten Arten der Zahl ausgedrückt werden kann.

Um die Natur der neuen Zahlform und ihre angenäherte Darstellung durch gebrochene Zahlen klar zu machen, ist der wichtige Begriff der Grenze einzuführen, der hier zum erstenmal in der Arithmetik auftritt. Es ist also zu zeigen, daß für die irrationale $\sqrt[b]{a}$ stets zwei Werte $\alpha = \frac{m}{n}$ und $\beta = \frac{m+1}{n}$ gefunden werden können, sodaß der erstere kleiner, der letztere größer als $\sqrt[b]{a}$ ist, und daß man diese beiden Werte durch Vergrößerung von n einander und somit auch der Wurzelgröße ohne Ende, d. h. dergestalt nähern kann, daß der Unterschied kleiner ist, als jede beliebige, noch so klein gedachte Zahl.

Es bleibt dann noch der Nachweis zu führen, daß die bisherigen Rechnungsregeln, welche ausdrücklich von der Voraussetzung der Entstehung der Zahlen aus der Einheit ausgingen, auch für die Irrationalzahlen giltig bleiben, bei welchen eine Zerlegung in Einheiten oder aliquote Teile derselben nicht möglich ist. Derselbe beruht wissenschaftlich auf dem Fundamentalsatze, daß diejenigen Gesetze, welche für alle Nachbarwerte giltig sind, die sich der Grenzzahl ohne Ende nähern, auch für die Grenze selbst in Geltung bleiben müssen.

Die größte Schwierigkeit endlich, welche in der Theorie des Radicierens vorkommt, entsteht durch das Auftreten der imaginären Zahlen. Daß z. B. $\sqrt{-4}$ durch keine reelle Zahl dargestellt werden kann, ist zwar sehr leicht zu zeigen, daß aber trotzdem derselben eine Bedeutung beigelegt werden könne, welche gestatte, mit solchen Zahlformen zu rechnen, das läßt sich dem Schüler nicht in gleicher Weise, wie bei den früheren Zahlformen, welche neu auftraten, klar machen.

Man kann hier wiederholend auf die Analogie mit jenen früheren Fällen hinweisen, indem man etwa in folgender Weise rekapituliert: Ursprünglich kannten wir bloß die Reihe der absoluten ganzen Zahlen. Die Subtraktion führte zuerst zu Aufgaben, welche mit Hilfe derselben nicht lösbar waren und deshalb z. B. dem Kinde, dessen Zahlenvorstellungen sich noch ganz auf jene Reihe beschränken, als überhaupt unmöglich erscheinen. In der That sind sie dies bei allen praktischen

Anwendungen, in welchen ein Gegensatz der Zahlen nicht vorhanden ist: in der Aufgabe. in einem Hause befanden sich a Menschen, b derselben gingen heraus, wieviele blieben darin? wird der Fall $b > a$ stets die Unmöglichkeit der Aufgabe bedeuten. Daß in dieser Art negative Resultate nicht selten als unmögliche auszuschließen sind, lehrt ja u. a. auch vielfach die Diskussion geometrischer Aufgaben. Trotzdem haben dieselben eine Erklärung erhalten können, und selbst in der vorstehenden praktischen Aufgabe erhält das Resultat eine solche: es giebt die zur Möglichkeit fehlende Anzahl von Personen an. — In ähnlicher Weise brachte die Division die neue Form der gebrochenen Zahlen. Auch sie haben keinen Sinn in allen praktischen Anwendungen, in welchen eine Teilung der Einheit nicht möglich ist. Die Aufgabe: von 7 in einer Wohnung befindlichen Personen verließ der dritte Teil dieselbe, wieviele blieben zurück? ist unmöglich, wohl aber kann jede stetige Größe in jedem verlangten Verhältnis geteilt werden. — Die Radicierung bringt nun endlich eine doppelte Erweiterung des Zahlbegriffs; die erste derselben durch die irrationalen Zahlen hat ihre Erledigung kurz vorher gefunden. Alle diese Erfahrungen zeigen uns, daß wir auch bei der zweiten nicht ohne weiteres berechtigt sind zu sagen, die imaginäre Zahl sei sinnlos oder unmöglich, sondern nur daß dieselbe unter den bis dahin bekannt gewordenen Zahlformen nicht enthalten sei, und daß dieselbe in allen denjenigen praktischen Anwendungen die Unmöglichkeit einer Aufgabe anzeige, in welchen der Natur der Sache nach nur reelle Resultate möglich seien. Da aber dieses letztere bei sämtlichen Aufgaben des praktischen Lebens der Fall ist, so ist allerdings der Erläuterung des Begriffs der imaginären Zahl im Unterricht der Boden entzogen, auf welchem diejenigen der früheren Zahlformen ihre leichte Veranschaulichung fanden, und hierin liegt eben die große Schwierigkeit dieser Stelle. Denn daß man mit bloßen Zahlformen, bei denen man sich nichts reelles denken könne, gleichwohl rechnen dürfe, und daß man berechtigt sei, durch solche Rechnungen Resultate abzuleiten, welche ihrerseits reelle Bedeutung haben, das wird selbst den Schülern oberer Klassen schwer einleuchten. Man muß suchen einigermaßen klar zu machen, daß reelle und imaginäre Zahlen sich auf verschiedenartige Einheiten beziehen, und die geometrische Darstellung der imaginären Einheit nach Gauß kann dazu, wenngleich auch sie nur ein Notbehelf ist, verwendet werden. Vielleicht gelingt es, wenigstens begabteren Schülern auf diese Weise die Idee der Ausbreitung des Zahlbegriffs von der Zahlenlinie auf die Zahlenebene mittelst der komplexen Zahlen einigermaßen klar zu machen.

Das praktische Ausziehen der Wurzeln pflegt verhältnismäßig sehr viele Zeit wegzunehmen, bis es zur Fertigkeit gebracht ist, und es fragt sich deshalb, ob dasselbe sich nicht einschränken lasse. Die numerische Berechnung von Quadratwurzeln kommt in den Anwendungen häufig genug vor, um es notwendig zu machen, daß der

Schüler dieselbe auch ohne Logarithmentafel ausführen lerne; außerdem hilft sie dazu, den Begriff einer Wurzel erst recht klar zu machen. Wenn dieselbe deshalb nicht zu entbehren ist, so fragt es sich doch, ob das Erlernen besonderer Rechnungsvorteile, das Bemühen, die kürzeste Schreib- und Rechenweise aufzufinden und zu lehren, bei dem im ganzen doch vereinzelten Gebrauche derselben hinreichend lohnend ist, um ihm einen erheblich zeitraubenden Einfluß einräumen zu dürfen. Die direkte Berechnung der Kubikwurzeln aber ist unter allen Umständen schon so weitläufig und wird nach der bald darauf folgenden Anwendung der Logarithmen meist so wenig weiter geübt, daß man sich ernstlich fragen muß, ob es nicht angezeigt sei, dieselbe ganz zu streichen, oder doch auf ein Minimum zu beschränken. Man bedenke doch, daß es sich hier zum größeren Teil um ein mechanisches Können handelt, welches nur bei sehr wenigen der Lernenden jemals zu einer nennenswerten praktischen Anwendung gelangt, und welches an sich nicht gerade viele allgemein bildende Momente enthält. Sollte also die zur Erlangung von Fertigkeit im Ausziehen der Kubikwurzeln aus vielstelligen Zahlen nötige Zeit sich nicht zu gunsten anderer, wichtigerer Partien wenigstens erheblich einschränken lassen?

§ 31. Die Logarithmen.

Die Theorie der Logarithmen unterscheidet sich im Schulunterricht von den anderen Abschnitten der Arithmetik wesentlich dadurch, daß dieselbe weniger des Ausbaues des wissenschaftlichen Systems als des praktischen Gebrauchs wegen gelehrt zu werden pflegt. Denn die in den Lehrbüchern behandelten Sätze über Logarithmen beschränken sich fast durchweg auf das durch den letzteren Geforderte, und auf eine vollständigere Theorie, wie bei den Potenzen und Wurzeln, wird verzichtet. Eine solche müßte beispielsweise auch Formeln, wie

$$^{mn}\log a = \frac{^{m}\log a \, . \, ^{n}\log a}{^{m}\log a + {}^{n}\log a}; \quad ^{\frac{m}{n}}\log a = \frac{^{n}\log a \, . \, ^{m}\log a}{^{n}\log a - {}^{m}\log a}$$

einschließen und die Frage erörtern, ob auch die vorliegende inverse Operation Veranlassung zu Erweiterungen des Zahlbegriffs giebt. Statt dessen begnügt man sich hier oft damit, z. B. die Form $+{}^{n}\log(-a)$ ohne weiteres für unmöglich zu erklären, eine Untersuchung darüber, welche Bedeutung derselben etwa beizulegen, bezw. den Nachweis, daß dieselbe imaginär sei, aber wohl regelmäßig als zu weitführend, zu unterlassen, oder doch auf spätere ergänzende Abschnitte zu verweisen.

Die Beweise, bezw. die Ableitungen der vier Hauptformeln, welche die Grundlage des praktischen Rechnens mit Logarithmen bilden, können in ganz analoger Weise wie die der Gesetze des Radicierens gefunden werden. Ist z. B. $^{m}\log(ab)$ zu entwickeln, so giebt der Be-

griff des Logarithmus die gestellte Aufgabe dahin an, daß der Exponent x gesucht wird, mit dem m potenziert werden muß, um ab zu erhalten, und zwar soll versucht werden, denselben aus den Logarithmen der Einzelfaktoren, also aus den Exponenten in $m^y = a$, $m^z = b$ zu finden. Da nun $ab = m^y \cdot m^z = m^{y+z}$, so ist $x = y + z$, oder ${}^m\log(ab) = {}^m\log a + {}^m\log b$.

Auch die Berechnung der Logarithmen stellt sich für den Unterricht anders, als die der früheren Zahlenverbindungen. Elementare Methoden zu lehren, die in der Praxis niemand mehr anwendet, und die viel zu weitläufig sind, um ihnen mangels eines genügend anregenden Inhalts die zu praktischer Einübung erforderliche Zeit widmen zu dürfen, würde jeder gern vermeiden. Die Theorie der logarithmischen Reihen aber kann, mindestens an dieser Stelle, unmöglich durchgenommen werden. Das Bequemste würde es sein, diesen für den Unterricht wenig ersprießlichen Abschnitt ganz zu streichen, und die Schüler darauf zu verweisen, daß in einer anderen mathematischen Disciplin, welche weitergehenden Studien vorbehalten sei, der Mangel in geeigneter Weise ersetzt werde. Allein es widerspricht der wissenschaftlichen Gewissenhaftigkeit namentlich des Mathematikers, daß dem Schüler zugemutet werde, ein Ergebnis der Wissenschaft auf Treu und Glauben gelten zu lassen und die Begründung einer Sache dieser nicht vorauszuschicken, sondern in betreff derselben auf ein Später zu verweisen. Ist doch der Schüler bisher stets gelehrt worden, in der Mathematik nichts gelten zu lassen, ehe es fest bewiesen sei. Manche werden vielleicht auch wünschen, den Schülern eine Vorstellung davon beizubringen, welche ganz außerordentliche Mühe und Sorgfalt die ersten Berechner der Logarithmentafeln aufzuwenden hatten, damit dieselben das Verdienst einer so gewaltigen Arbeit schätzen lernen. Zum mindesten aber wird man die Schüler dahin zu bringen haben, daß dieselben, wenn sie auch in Wirklichkeit die praktische Berechnung eines Logarithmus nicht ausführen, doch sich bewußt sind, dazu infolge gewonnener Einsicht in ein bestimmtes Berechnungsverfahren imstande zu sein. Sie sollen also die Tafeln nicht aus reinem Autoritätsglauben annehmen, sondern einsehen, daß die Berechner derselben einer Kontrole von allen Seiten gewärtig sein müssen.

Welche der verschiedenen elementaren Methoden zu diesem Zwecke zu benutzen sei, kann dem einzelnen Lehrer und dem Lehrbuche anheimgestellt bleiben. Zu wünschen ist nur, daß das Ganze möglichst wenig Zeit in Anspruch nehme.

In betreff der Wahl der Logarithmentafel hat man sich in früherer Zeit meist für siebenstellige entschieden. Neuerdings kommen jedoch immer mehr die fünfstelligen in Gebrauch, und in einzelnen Staaten oder Provinzen sind die letzteren sogar durch Verfügungen der betreffenden Schulbehörden vorgeschrieben worden. Als Grund für diese Wahl ist hauptsächlich der geringere Zeitverbrauch bei dem Rechnen

mit kürzeren Tafeln geltend zu machen. Derselbe ist weniger durch die kleinere Anzahl der in den Rechnungen zu gebrauchenden Ziffern bedingt, er beruht vielmehr hauptsächlich darauf, daß man bei dem Aufschlagen eine viel kleinere Menge von Seiten zu durchblättern hat, und daß die Interpolationen ganz erheblich rascher ausgeführt werden. Der Gewinn, welcher so durch Ersparnis an einer auf eine fast ganz mechanische Thätigkeit verwendeten Zeit erwächst, ist erfahrungsmäßig ein recht bedeutender, wenngleich dies von Anhängern des Gebrauchs siebenstelliger Tafeln geleugnet worden ist. — Andererseits ist die mit fünf Decimalen zu erzielende Genauigkeit der Rechnung vollständig hinreichend, sie übertrifft fast durchweg dasjenige erheblich, was in Fällen des praktischen Lebens erreichbar ist, und sie genügt auch für die meisten wissenschaftlichen Arbeiten. Die praktischen Astronomen wenden nur ausnahmsweise Tafeln mit mehr Stellen an, für gewöhnlich benutzen sie die fünfstelligen. Wenn Leute, die viel und genau zu rechnen haben, einstimmig die letzteren für ihren Gebrauch wählen, so fällt diese Entscheidung auch für die Schulen ins Gewicht.

Der Vermittelungsvorschlag, sechsstellige Tafeln zu gebrauchen, hat daher auch wenig Anklang gefunden. Dagegen ist von einzelnen Seiten sogar die Anwendung von nur vier oder selbst (für besondere Fälle) drei Decimalen befürwortet worden, doch wird hier die Abnahme der Genauigkeit schon zu fühlbar werden, als daß eine allgemeine Zustimmung sich erwarten ließe.

Wir geben im folgenden zunächst eine Aufzählung verschiedener Tabellenwerke, von denen die meisten zu den viel gebrauchten gehören.

a. Fünfstellige Tafeln:

1. August, Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Leipzig, Veit.
2. Schlömilch, Fünfstellige logarithmische und trig. Tafeln. Braunschweig, Vieweg.
3. Dasselbe, wohlfeile Schulausgabe.
4. Wittstein, Fünfstellige logarithmisch-trig. Tafeln. Hannover, Hahn.
5. Greve, Fünfstellige log. und trig. Tafeln. Bielefeld und Leipzig, Velhagen und Klasing.
6. Gauß, F. G., Fünfstellige log. und trig. Tafeln. Halle, Strien.
7. Bremikers fünfstellige log.-trig. Tafeln, besorgt von Kallius, Berlin, Weidmann.
8. Nell, Fünfstellige Logarithmen. Darmstadt, Bergsträßer.
9. Hertzer, Fünfstellige Logarithmentafeln. Berlin, Gärtner.
10. Ott, Fünfstellige Logarithmentafeln. Prag, Calve.
11. Becker, Logarithm.-trig. Handbuch auf fünf Decimalen. Leipzig, Tauchnitz.
12. Rühlmann, Logarithmische, trigon. und andere Tafeln. Leipzig, Arnold.

b. Siebenstellige Tafeln:

1. Vegas Logarithmisch-trigonom. Handbuch. Neue Ausgabe, bearbeitet von Bremiker. (Die neueren Auflagen besorgt von Prof. Tietjen.) Berlin, Weidmann.

2. Schrön, Siebenstellige gemeine Logarithmen u. s. w. Braunschweig, Vieweg.

3. Bruhns, Neues log.-trig. Handbuch. Leipzig, Tauchnitz.

4. Köhler, Logar.-trig. Handbuch. Leipzig, Tauchnitz.

c. Sechsstellige Tafeln:

Bremiker, Sechsstellige logar.-trig. Tafeln. Berlin, Nicolai.

d. Vierstellige Tafeln:

1. Schlegel, Tafel vierstelliger Logarithmen. Wolfenbüttel, Zwißler.

2. Bremiker, Tafel vierstelliger Logarithmen. Berlin, Weidmann.

3. Henrici, Vierstellige logar.-trig. Tafeln. Leipzig, Teubner.

Hat man sich über die Stellenzahl entschieden, so ist die engere Wahl zwischen den verschiedenen Ausgaben von keiner sehr wesentlichen Bedeutung. Als Eigenschaften, welche zu wünschen sind, können — abgesehen von der Frage des Preises — folgende erwähnt werden:

Das Papier soll stark, haltbar und von einer die Augen nicht ermüdenden Farbe sein. Die Ziffern müssen eine gut lesbare Größe und scharf ausgeprägte Form haben, sodaß Verwechselungen, z. B. zwischen 3 und 5, ausgeschlossen sind. Es empfehlen sich nach dieser Seite diejenigen Tafeln, welche die Ziffern nach altenglischem Schnitt haben, die teils über, teils unter der Zeile etwas hervortreten. Das Format braucht kein Taschenformat zu sein, denn der Schüler soll das Buch nicht in der Tasche herumtragen, sondern aufgeschlagen auf dem Tische liegend benutzen. Wichtiger ist die, ebenfalls das Format bedingende Einrichtung. Es ist von Wert, daß jede Seite oder jedes Seitenpaar ein gewisses geschlossenes Gebiet enthalte, sodaß die einzelnen Seiten einander inhaltlich entsprechen und der Aufschlagende dahin gelangen könne, sein Auge sofort gewohnheitsmäßig in die Gegend der Stelle zu richten, wo die gesuchte Zahl stehen muß. Dies ist z. B. der Fall, wenn jede Seite 50 Zeilen erhält, sodaß also je zwei zugleich aufgeschlagene immer mit einem vollen Hundert abschließen, allein eine solche Einrichtung paßt schlecht zu den trigonometrischen Tafeln, die doch in demselben Buche enthalten sein sollen, und bei denen es erforderlich ist, jede Seite mit einem ganzen oder halben Grad abzuschließen. Die Decimaleinteilung des Grades, welche diese Ungleichmäßigkeit beseitigen würde, hat wenig Aussicht, zu allgemeinerem Gebrauche zu gelangen, weil die Beziehung zwischen Bogen und Zeit dadurch weniger einfach würde, man müßte denn auch die Zeit decimal einteilen, und dies ist wegen der Schwierigkeiten der praktischen Ausführung wohl noch von niemand ernstlich vorgeschlagen worden. — Wo deshalb die übersicht-

lichste Anordnung der Logarithmentafel der natürlichen Zahlen zu gunsten der trigonometrischen aufgegeben ist, da muß doch mindestens jede Seite mit vollen Zehnern abschließen. Außerdem muß für leichtere Übersichtlichkeit durch Trennung bestimmter Gruppen, etwa von 5 oder 10 Zeilen, durch Zwischenräume oder Striche gesorgt sein. Die verschiedenen Ausgaben zeigen in allen diesen Hinsichten Abweichungen von einander; eine Vergleichung derselben an dieser Stelle würde zu weit führen.

Auch auf die Einrichtungen zur Interpolation ist zu achten. Gewöhnlich sind kleine Täfelchen am Rande beigedruckt, welche die Berechnung der Zehntel der Differenzen u. s. w. ersparen sollen. Meist geschieht diese Berechnung jedoch in kürzerer Zeit im Kopfe, als das Aufsuchen der betreffenden Stelle am Rande erfordert, und man sollte deshalb den Schülern diese Selbstberechnung nicht zu leicht oder zu rasch erlassen.

Alle übrigen Beigaben zur Tafel, also z. B. eine Tabelle der Gaußischen Logarithmen für Summen und Differenzen, oder Tabellen, welche nur innerhalb bestimmter, auf der Schule nicht gelehrter Wissenschaften gebraucht werden, sind für die letztere überflüssig und erhöhen nur unnützer Weise den Preis des Buches, während sie seine Übersichtlichkeit vermindern. Einige physikalische und astronomische Konstanten, eine kleine Tabelle von Quadrat- und Kubikwurzeln häufig vorkommender Zahlen u. dgl. m. können allerdings zum Gebrauche bei Aufgaben aus der Physik, der astronomischen Geographie und anderen Gebieten nützlich sein. Ganz zu verwerfen ist aber die Beigabe von Verzeichnissen mathematischer Formeln, die der Schüler nicht abschreiben, sondern im Kopfe haben soll, oder gar diejenige eines ganzen Lehrbuchs solcher aus den übrigen Disciplinen herausgerissener Partien des Unterrichts, bei denen Logarithmen gebraucht werden.

Die Erklärung des briggischen Logarithmensystems und seiner Eigenschaften, der Einrichtung und des Gebrauchs der Tafel und die Übungen im letzteren bieten an der Hand des Lehrbuchs und einer guten Aufgabensammlung keine besonderen didaktischen Schwierigkeiten. Wünschenswert, wenn auch nicht unerläßlich, ist, daß alle Schüler einer Klasse dieselbe Ausgabe einer Logarithmentafel in Händen haben, damit bei der ersten Unterweisung im Aufschlagen alle gleichzeitig und gemeinschaftlich unter sich und mit dem Lehrer arbeiten können, und der letztere nicht genötigt ist, auf verschiedene Einrichtungen der Tafeln Rücksicht zu nehmen. Denn auch hier muß, wie sonst, jede Frage an die ganze Klasse zugleich gerichtet, und erst nachher der Einzelne zur Beantwortung aufgerufen werden, es müssen also z. B. alle Schüler gleichzeitig das Proportionalteilchen suchen, gleichzeitig addieren oder subtrahieren u. s. w. Erst später, wenn es sich nicht mehr um die Unterweisung, sondern nur um die Einübung behufs Erzielung von Fertigkeit handelt, kann der Wetteifer zwischen den einzelnen Schülern

in betreff der Raschheit des Arbeitens zugelassen und begünstigt werden. — Bei dem Aufschlagen der Tafel verschmähe man nicht die Einprägung folgender praktischer Regeln: Die Logarithmentafel hat stets zur linken Seite des Papiers zu liegen, auf welches der Rechnende schreibt; nur die linke Hand darf in derselben blättern, die rechte ist weder mit der gefüllten Feder noch nach Weglegen derselben in das Buch zu bringen. Bei dem Aufsuchen einer Zahl auf der aufgeschlagenen Seite werden der Mittel- und der Ringfinger der linken Hand untergeschlagen, der kleine und der Zeigefinger stehen also vor; mit dem einen derselben wird der Numerus, mit dem anderen gleichzeitig der Logarithmus fixiert und keiner derselben verläßt seine Stelle, bis die aufzusuchende Zahl nach der im Kopfe gemachten Interpolation durch die schreibende rechte Hand zu Papier gebracht ist, und es also nicht mehr nötig ist, die bereits verlassene Zeile und Zahl noch einmal aufzusuchen. Überhaupt ist soviel als möglich im Kopfe zu rechnen; wer z. B. den Logarithmus der nächst kleineren Zahl der Tafel hinschreibt, dann das Proportionalteilchen berechnet, dieses unter den vorigen Logarithmus schreibt und nun addiert, verschwendet nicht bloß Zeit, sondern schädigt auch die Übersichtlichkeit der Rechnung. Selbstverständlich ist hierbei der Gebrauch fünfstelliger Tafeln vorausgesetzt; es ist eben einer der Vorzüge der letzteren, daß die Nebenrechnungen von jedem leicht im Kopfe gemacht werden können, und diesen Vorteil soll man sich nicht entgehen lassen.

Besondere Sorgfalt ist auf die Logarithmen mit negativer Charakteristik und auf das Verfahren bei dem Vorkommen negativer Zahlen, also auf die Anwendung der Logarithmen mit angehängtem n zu verwenden. Man gehe nicht zu rasch darüber hinweg, sondern überzeuge sich wohl, daß ein vollständig klares Verständnis erzielt ist. Die Schüler arbeiten hier oft rein mechanisch nach der gegebenen Regel und kommen dann bei eine Zeit lang unterlassener Übung mangels des richtigen und sicheren Verständnisses in Verwirrung.

Weitere Bemerkungen über die Tafeln und ihren Gebrauch sollen im Anschluß an die Besprechung der trigonometrischen Tabellen, im § 55, gemacht werden.

c) Algebra.

§ 32. Die Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten.

Bei den Übungen in der Auflösung angesetzter Gleichungen ersten Grades soll das Umformen derselben bis zu einer gewissen mechanischen Fertigkeit gebracht werden, denn die Gleichungen sind das Handwerkszeug, von dessen gewandter und sicherer Handhabung die meisten Fortschritte auf den nachfolgenden Gebieten abhängen. Dieses Ziel zu er-

reichen, müssen die Übungen zahlreich sein, und namentlich darf nicht zu früh von leichten und einfachen Aufgaben zu komplizierteren oder von den regelmäßigen zu Ausnahmefällen übergegangen werden. Daß jeder einzelnen Transformationsregel unmittelbar ihre Einübung folgen muß, und nicht etwa zuerst die ganze Theorie der Umformungen durchgearbeitet werden darf, ehe man zu der Anwendung derselben übergeht, wird wohl nirgends bestritten werden. Die Beispiele sollen dem einzelnen Satze auf dem Fuße nachfolgen. Es ist dazu mindestens wünschenswert, daß die Aufgabensammlung dem entsprechend systematisch geordnet sei.

Die Erzielung einer Fertigkeit im Operieren ist aber nicht der einzige Zweck dieser Unterrichtspartie, vielmehr ist auch hier, wie überall im mathematischen Unterricht, in erster Reihe das Verständnis der Begründung zu erstreben. Deshalb ist vor der Gefahr zu warnen, daß man zu rasch zu mechanischen Regeln übergehe, welche die Schüler dann anwenden, ohne jemals an die Begründung zu denken. Die Transposition der Glieder von einer Seite zur andern z. B. ist daher so lange als Addition zu oder Subtraktion von beiden Seiten auszusprechen, bis alle Schüler darin sicher sind. Erst dann darf die mechanische Regel aufgestellt werden: Man kann jedes Glied einer Gleichung mit dem entgegengesetzten Vorzeichen auf die andere Seite setzen. Entsprechendes gilt selbstverständlich für alle folgenden Regeln. Nur wer die Mathematik bloß um ihrer praktischen Anwendung willen zu lehren und dieses Ziel in möglichst kurzer Zeit zu erreichen beabsichtigte, dürfte anders verfahren und die Algebra als Kunst statt als Wissenschaft betreiben.

Der Fortschritt zu neuen Sätzen oder Regeln wird auch hier mit der wiederholten Anwendung der alten verbunden sein, und auch die nach der Zusammenstellung des ganzen Auflösungsverfahrens zu behandelnden zahlreichen allgemeinen, bezw. komplizierteren Aufgaben werden dafür sorgen, daß der Gebrauch der einzelnen Regel nicht bloß an der Stelle verlangt wird, wo die systematische Ordnung der Sammlung den Schüler ausdrücklich darauf hinweist, nämlich da, wo sie zuerst gelernt werden soll.

In betreff der schwierigeren Aufgaben ist übrigens Maß zu halten. In einzelnen Sammlungen kommen Beispiele vor, welche so außerordentlich verwickelt sind, daß auf dieselben nicht mit Unrecht die Bezeichnung „Knifftologien“ (nach Schwering) angewendet worden ist, weil die zur Auflösung nötige Zeit und Mühe in keinem richtigen Verhältnis zu dem erzielten Nutzen steht. Ja solche Aufgaben können geradezu schaden, wenn die allzusehr gehäufte Gelegenheit, in schwer übersehbaren Ausdrücken Fehler zu machen, den meisten oder allen Schülern für ihre viele Mühe noch den Verdruß des steten Mißlingens bereitet.

Eine nicht unwichtige, jedoch vielleicht oft zu wenig beachtete Forderung ist die, daß auch das Kopfrechnen bei der Auflösung der

Gleichungen möglichst anzuwenden ist, ja daß besondere Übungen nötig sind, ganze Auflösungen im Kopfe zu machen. Daß letzteres bei den einfachen Anfangsaufgaben neben dem schriftlichen Rechnen möglich und nützlich ist, bedarf keines Nachweises. Gleichungen, wie $5x + 7x = 24$ oder $7x + 11 = 5x + 15$ z. B. soll jeder Schüler im Kopfe auflösen lernen, schon damit er später nicht zu jedem kleinen Fortschritt erst Feder und Papier ergreifen muß. Aber auch schwierigere Aufgaben lassen sich zuweilen ganz gut im Kopfe behandeln, und es sind dies gerade solche, wie sie in der Anwendung oft vorkommen. Namentlich sind nach dieser Richtung diejenigen Gleichungen zu nennen, in denen die Unbekannte nur einmal vorkommt. Bei der mündlichen Auflösung derselben verfährt man so, daß alle Glieder, Faktoren u. s. w. sozusagen in der Reihenfolge von außen nach innen von der Seite der Unbekannten entfernt werden. Um also z. B. $12(13 + 5x) - 7 = 209$ im Kopfe aufzulösen, beginnt man nicht mit der Auflösung der Klammer, sondern mit dem Transponieren von 7, setzt also $12(13 + 5x) = 216$. Dann wird durch 12 dividiert: $13 + 5x = 18$, dann 13 transponiert: $5x = 5$, dann durch 5 dividiert: $x = 1$. Man braucht dazu nicht die einzelnen Zwischengleichungen vollständig auszusprechen, die Schüler lernen vielmehr bald, ohne weiteres das Resultat anzugeben, und z. B. die Aufgabe

$$5\left[3 + 4\left(7 - 6 \cdot \frac{x - 8}{11}\right)\right] = 15,$$

wie folgt zu rechnen: $15 : 5 = 3$; $3 - 3 = 0$; $0 : 4 = 0$; $0 - 7 = -7$; $-7 : -6 = 1\frac{1}{6}$; $1\frac{1}{6} \cdot 11 = 12\frac{5}{6}$; $12\frac{5}{6} + 8 = 20\frac{5}{6}$. Es ist gewiß von Wert, wenn später die Schüler bei Aufgaben, etwa von der Form

$$\left(\frac{ax + b}{c} - d\right)e + f = g,$$

ohne jede Zwischenrechnung sofort das Resultat

$$x = \left\{\left(\frac{g - f}{e} + d\right)c - b\right\} : a$$

angeben können.

Sobald die Schüler in dem regelmäßigen (schriftlichen) Auflösungsverfahren hinreichend sicher sind, jedoch nicht eher, übe man sie auch darin, die einzelnen Umformungen einer Gleichung nicht bloß in der durch jene allgemeine Regel vorgeschriebenen Reihenfolge vorzunehmen, sondern je nach der Natur des einzelnen Beispiels dieselbe in vorteilhafter Weise abzuändern. Solche Übungen, das dem besonderen Falle Eigenartige zu erkennen und zur Auffindung womöglich den kürzesten Weg zu benutzen, sind allgemein von erzieherischem Werte. Auch ist möglichst dahin zu wirken, daß die Fertigkeit erlangt wird, zwei oder mehrere Umformungen zugleich vorzunehmen. Ist z. B. die Gleichung

$$\frac{15}{3x} - 3 + \frac{4}{2x} - 5 = \frac{16}{3x} - 6 - \frac{1}{4x} - \frac{1}{24}$$

aufzulösen, so wird der in solcher Weise unterrichtete Schüler nicht damit beginnen, daß er mechanisch alle Glieder mit dem Hauptnenner $24x$ multiplizieren, sondern er wird vielleicht zuerst die Glieder mit den Nennern $3x$, sowie die mit $2x$ und $4x$ vereinigen, auch -3, -5, -6 zusammenfassen und demnach als erste Umformung

$$\frac{9}{4x} = \frac{1}{3x} + 2 - \frac{1}{24}$$

bilden, denn nun hat er bloß 4 Glieder statt 8 mit $24x$ zu multiplizieren. Aus der zweiten Umformung

$$54 = 8 + 47x$$

rechnet er nun im Kopfe $x = \frac{46}{47}$. In ähnlicher Weise wird er z. B. bei

$$\frac{(a+b)x}{a-b} + c + \frac{(a-b)x}{a+b} = \frac{(a+c)x}{a+b} + \frac{(a+c)x}{a-b}$$

zuerst die Glieder vereinigen, welche gleiche Nenner haben, hierbei zugleich jedesmal den Faktor x absondern und die Subtraktion ausführen, also sofort schreiben

$$\frac{b-c}{a-b}x + c = \frac{b+c}{a+b}x,$$

woraus dann sogleich

$$c(a^2 - b^2) = x(ab + ac - b^2 - bc - ab + ac - b^2 + bc),$$

$$c(a^2 - b^2) = 2x(ac - b^2),$$

$$x = \frac{c(a^2 - b^2)}{2(ac - b^2)}$$

abgeleitet wird. Selbstverständlich hat man eine solche Fertigkeit jedoch nicht einfach zu verlangen, sondern nach und nach heranzubilden.

§ 33. Fortsetzung: Eingekleidete Aufgaben.

Die eingekleideten Aufgaben zu den Gleichungen bilden einen wichtigen Teil des Unterrichts, denn sie zeigen und üben nicht bloß die Anwendung des Gelernten und wirken dadurch zugleich belebend auf das Interesse, sie sind auch ganz besonders als Denk- und Sprachübungen von ausgezeichneter Wirkung, und sie wollen auch nach diesen Richtungen behandelt sein.

Da dieselben häufig auf Gleichungen führen, deren Auflösung keiner vorhergegangenen größeren Übung bedarf, so kann man ihre

Durchnahme im Unterricht mit der Behandlung angesetzter Gleichungen in angemessener Weise abwechseln lassen, um den Schülern möglichst bald eine Anwendung des Gelernten zu zeigen. Hierfür spricht sich auch Krumme (im Pädagog. Archiv XXI, S. 82) aus: „Es ist ja selbstverständlich, daß der Schüler eine gewisse Fertigkeit in der Auflösung von unbenannten Gleichungen erreicht haben muß, ehe er zu Anwendungen übergeht, damit die Schwierigkeiten nicht gehäuft werden. Aber halbe Jahre, ja Jahre lang Gleichungen in allen nur erdenklichen Formen lösen zu lassen, ehe zu Anwendungen übergegangen wird, führt zu einem geisttötenden Mechanismus. Durch ein solches Verfahren wird genau das Gegenteil von dem erreicht, was durch den Unterricht erreicht werden soll. Wenn hin und wieder eine Gleichung in unbenannten Zahlen, die längere Zeit erfordert, gelöst wird, um die Schüler an Sorgfalt und Aufmerksamkeit zu gewöhnen, so läßt sich das ja verteidigen; häufiger gegeben ist solche Beschäftigung aber Zeitverschwendung. — Sobald demnach die Schüler die ersten Schwierigkeiten überwunden haben und Gleichungen in unbenannten Zahlen mit einiger Fertigkeit aufzulösen imstande sind, ist zu Anwendungen überzugehen. Und es haben dann leichtere Aufgaben, die durch Gleichungen gelöst werden, mit der Auflösung schwierigerer Gleichungen in unbenannten Zahlen in angemessener Weise zu wechseln."

Schon früher ist erwähnt worden, daß man das Auffinden des sogenannten Ansatzes nicht kurzweg dem persönlichen Scharfsinn des Arbeitenden zuweisen dürfe, sondern daß eine methodische Anleitung möglich und notwendig sei. Eine allgemeine Regel für das Ansetzen, welche das eigene Denken entbehrlich mache, kann und soll freilich nicht gegeben werden, wie auch keine allgemeine Methode, nach der sich alle einzelnen Fälle ausnahmslos behandeln ließen. Vielmehr kann hier nur von einer allmählich fortschreitenden systematischen Anleitung die Rede sein.

Man beginne zu diesem Zwecke mit Aufgaben, welche man als eine Angabe der Gleichungen in Worten betrachten kann, wie z. B. „Subtrahiert man das Vierfache einer gedachten Zahl von 21, so erhält man 9; man berechne diese Zahl." Hierbei ist die Arbeit des Ansetzenden nur ein Übersetzen aus der Wortsprache in die Formelsprache. Die gesuchte Zahl wird stets als Unbekannte behandelt, und das in der Aufgabe Gesagte wird unmittelbar durch Zeichen und Zahlen ausgedrückt. Dies ist das Fundament für alles Spätere. Auch in allen folgenden Aufgaben ist jedesmal eine Beziehung zwischen der gesuchten und den gegebenen Größen ausgesprochen, und es handelt sich nur darum, dieselbe losgeschält von nebensächlichem Beiwerk und mit Enthüllung der infolge von Abkürzungen vorhandenen Dunkelheiten aufzufinden und in algebraischer Form darzustellen.

Dies weiter zu zeigen und zu üben eignet sich kein Gebiet besser, als dasjenige der sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten, weil hier

jene Beziehungen schon durch den früheren Rechenunterricht mehr oder minder aufgehellt worden sind. Wir wählen also etwa als zweiten Teil Procentrechnungen. In Aufgaben, wie z. B.

„Wie groß ist ein Kapital, welches zu 5% Procent jährlich am Ende eines Jahres mit den Zinsen 5734,92 *M.* beträgt?"

ist auch die anzusetzende Gleichung als bereits fertig vorhanden dem Blicke des Schülers leicht sichtbar zu machen; es ist nur eine Angabe durch den Gebrauch des abkürzenden Wortes Procent etwas verhüllt: So oft 100 in x enthalten sind, so oft sollen 5% zugezählt werden.

Man gehe nun nicht sogleich zu Aufgaben anderer Art über, sondern lasse die noch schwachen Schüler erst den Gedankengang der vorhergehenden mehrmals, aber an neuen Zahlenbeispielen und etwa auch mit leichtem Wechsel in der äußeren Einkleidung wiederholen. Dem Schüler erscheint jedes andere solche Beispiel zunächst als eine ganz neue Aufgabe, die nur eine der vorigen ähnliche Auflösung habe. Giebt man ihm dann dieselbe Aufgabe auch mit allgemeinen Zahlzeichen, läßt ihn also

$$x + \frac{x}{100} \cdot p = a$$

ansetzen und auflösen, so kann ihm nun begreiflich gemacht werden, daß er in den vorhergegangenen Beispielen nur verschiedene Zahlwerte von p und a benutzt, im übrigen aber jedesmal dieselbe Arbeit gethan habe, daß ferner das allgemeine Resultat

$$x = \frac{100a}{100 + p}$$

alle jene besonderen Fälle in sich enthalte, und daß aus ihm daher die früheren Resultate durch Einsetzen der besonderen Werte zu finden sind. Man wird dies vielleicht noch an einigen anderen Zahlenbeispielen ausführen lassen.

Man gehe nun zunächst über zu Aufgaben, welche sich auf dieselbe Größenbeziehung stützen, also mittels derselben Gleichung, nur mit Wechsel der unbekannten Größe auflösen lassen. Diese Übung erhält eine größere Mannigfaltigkeit, wenn man vorher auch noch einen anderen Zeitraum als das einzelne Jahr einführt, also die Beziehungsgleichung

$$k + \frac{k}{100} p \cdot n = a$$

anwendet. War vorher k gesucht, so kann man nun erst p, dann n als Unbekannte wählen. In jedem von beiden Fällen wird zweckmäßig noch ebenso ausführlich, wie vorher, verfahren: zuerst Aufgaben mit bestimmten Zahlen, dann die allgemeine, zum Schluß Substitutionen in das allgemeine Resultat.

Durch das hier empfohlene Verfahren wird zunächst der Gewinn erzielt, daß der Schüler die Bedeutung und den Wert allgemeiner Rechnungen einsehen lernt. Das in Buchstaben dargestellte Resultat wird, in Worten ausgedrückt, zur Rechnungsregel, nach welcher eine bestimmte Art von Aufgaben von jedem Rechner mechanisch aufgelöst werden kann; das allgemeine Verfahren erscheint so als ein Mittel, Rechnungsregeln aufzustellen und vergessene wieder zu finden. Durch das vorstehende Verfahren wird der Schüler ferner zu dem Verständnis des Begriffs einer Beziehungsgleichung hingeleitet, welche die gegenseitige Abhängigkeit verschiedener mit einander verbundener Größen darstellt, und welche je nach Bedarf auf jede einzelne dieser Größen als Unbekannte aufgelöst werden kann. Es wird eine gute Übung sein, am Schlusse des vorstehenden kleinen Abschnitts die Gleichung $k\left(1 + \frac{pn}{100}\right) = a$ noch einmal, und im Kopfe, auf die einzelnen Größen nach einander auflösen zu lassen, wobei dann auch schon von der Bezeichnung der jeweiligen Unbekannten durch x Abstand genommen werden kann.

Das Aufsuchen der Beziehungsgleichung ergiebt in allen Fällen den Ansatz der Aufgabe. Das vorstehende Verfahren hilft dazu, daß die hierin liegende Forderung zu klarem Bewußtsein und Verständnis gelange. Dieses letztere weiter zu fördern und das Ansetzen methodisch weiter zu üben, dienen nun zusammengesetztere Aufgaben, welche vorerst demselben Ideenkreise angehören. Der Grundgedanke dieses Fortschrittes ist der folgende: Da die in der Aufgabe enthaltene Beziehung in Gestalt einer Gleichung dargestellt werden soll, so sind in allen Fällen zwei Größen zu ermitteln, welche gleiche Werte haben. In den vorhergehenden Aufgaben (und auch in den ersten zusammengesetzteren) war die eine dieser Größen, also die eine Seite der Gleichung unmittelbar ihrem Werte nach gegeben, und nur für die andere war ein aus verschiedenen Daten der Aufgabe und aus der Unbekannten gebildeter Ausdruck aufzustellen. Dieses letztere kann nun auch für beide Seiten erforderlich werden. Wird z. B. die Aufgabe gestellt: Jemand hat vor drei Jahren 2600 *M.* zu $4\frac{1}{2}$ Procent ausgeliehen und leiht jetzt 2500 *M.* zu 5 Procent aus; man soll berechnen, nach wieviel weiteren Jahren das zweite Kapital ebensoviel an Zinsen eingebracht haben wird, als das erste, so sind hier die beiden einander gleichzusetzenden Größen in der Aufgabe selbst unmittelbar genannt, man sieht also sofort, daß man die von 2600 *M.* zu $4\frac{1}{2}$ Procent in $3 + x$ Jahren gebrachten Zinsen den von 2500 *M.* zu 5 Procent in x Jahren gebrachten gleichzusetzen, also für beide Seiten der Gleichung einen Ausdruck nach Analogie der früher für eine Seite aufgestellten zu bilden hat. Der Fortschritt ist also ein stetiger und deshalb leicht zu erreichen. Später wird dann auch das Aufsuchen der einander gleichzusetzenden Größen nötig, und mit der Übung

dieses letzteren wird die allgemeine Anleitung im wesentlichen ihr Ziel erreichen.

Selbstverständlich kann man zu demselben nicht mittels des bisher angezogenen einzelnen Übungsgebietes allein gelangen. Man wird vielmehr die ersten Stufen des Entwickelungsganges auch an weiteren Gedankenkreisen anzuwenden haben, demnach das geschilderte Verfahren zunächst auch an anderen der sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten in geordneter Reihenfolge der letzteren, also z. B. an Verteilungsaufgaben und Mischungsrechnungen, in gleicher Weise üben. Zum Teil für Schüler viel schwieriger als diese, jedoch besonders lehrreich sind dann sogenannte Bewegungsaufgaben, die außerdem zu einigen weiteren Bemerkungen geeignete Gelegenheit geben.

Es ist sehr empfehlenswert, überall wo es möglich ist, den Sinn der Aufgabe durch eine Figur zu erläutern, sei dieselbe auch von der einfachsten Art. Den Sinn der Aufgabe völlig klar verstanden zu haben, ist fast identisch damit, die gesuchte Beziehung zwischen den einzelnen Größen zu erkennen. Jede Art von Veranschaulichung aber bietet dem Anfänger hierzu eine nicht zu verachtende Hilfe. Bei der Aufgabe z. B.: „Einem Reisenden, der täglich 10 Meilen zurücklegt, eilt ein anderer nach, der täglich 21 Meilen zurücklegt, nachdem jener bereits einen Vorsprung von 45 Meilen hat; nach wieviel Tagen und in welcher Entfernung vom Ausgangspunkte wird der zweite den ersten einholen?" ist die einfache Zeichnung einer den Weg darstellenden Strecke AB mit einem Punkte C und der zwischen A und C geschriebenen Zahl 45 eine entschiedene Hilfe für den Schüler. Derselbe sieht dadurch leichter, daß die beiden einander gleichzusetzenden Größen der in x Tagen vom zweiten zurückgelegte Weg AB und die Summe des in derselben Zeit vom ersten noch zurückgelegten Weges CB und des durch AC dargestellten Vorsprunges von 45 Meilen sind. Nach den vorausgegangenen Übungen dürfte derselbe nun die ganze Arbeit: $10x + 45 = 21x$, $x = 4\frac{1}{11}$ Tage, im Kopfe fertig machen.

Die allgemein durchgeführten Aufgaben dieser Gruppe bieten auch eine vortreffliche Gelegenheit, die Diskussion der Resultate zu üben. Wenn z. B. zu der vorstehenden Aufgabe die entsprechende allgemeine mit den Geschwindigkeiten c und c' und dem Vorsprunge a gelöst ist, so werden zu dem Resultat $x = \frac{a}{c' - c}$ die drei Fälle $c' > c$, $c' = c$ und $c' < c$ zu diskutieren sein. Insbesondere bietet die Deutung negativer Resultate für fähige Schüler eine ausgezeichnete Denkübung.

Um noch die Anleitung zum Ansetzen der Gleichung an einem etwas schwierigeren Beispiel dieser Art zu erläutern, wählen wir die folgende Aufgabe: „Zwei Knaben laufen um die Wette von A nach B und fangen gleichzeitig an zu laufen. Der erste legt in jeder Sekunde 2,5 m zurück, kehrt nach seiner Ankunft in B um und läuft mit der-

selben Geschwindigkeit dem zweiten, welcher in der Sekunde 2,1 m zurücklegt, entgegen. Wieviele Sekunden nach dem Ablaufe von A trifft er denselben, wenn die Entfernung von A bis B 253 m beträgt?"

Zeichnet man zur Erläuterung eine Strecke AB und auf derselben den Punkt C, in welchem die Begegnung stattfinde, so sieht man, daß der Weg des ersten Knaben gleich der ganzen Strecke $AB = 253$ m plus der unbekannten Strecke BC, der Weg des zweiten gleich AC, also die Summe ihrer Wege gleich 2 . 253 m zu setzen ist. Die eine Seite der Gleichung ist also gefunden; für die andere sind die beiden Wege auszudrücken und zu addieren. Laufen nun beide x Sekunden, so sind die Wege bezügl. gleich $2,5\,x$ und $2,1\,x$, also ist $4,6\,x = 506$, $x = 5060 : 46 = 110$. — Man kann aber auch als die einander gleich zu setzenden Größen die Zeiten annehmen, welche die Knaben zum Durchlaufen der Strecken $AB + BC$ und AC gebrauchen. Nimmt man daher zunächst als Unbekannte statt der gesuchten Sekundenzahl die Länge von AC in Metern an, so ist $AB + BC = 253 + (253 - x)$ $= 506 - x$; die betreffenden Zeiten sind $\frac{x}{2,1}$ und $\frac{506 - x}{2,5}$; man kann also ansetzen

$$\frac{x}{21} = \frac{506 - x}{25},$$

woraus $x = 231$ folgt. Die Zeit, welche der zweite braucht, beträgt also $231 : 2,1 = 110$ Sekunden. Man kann ferner den Unterschied der beiderseitigen Wege, 2 . BC doppelt ausdrücken: da der erste Knabe in jeder Sekunde $2,5 - 2,1 = 0,4$ m mehr zurücklegt, als der zweite, so ist sein Vorsprung in x Sekunden gleich $0,4\,x$ m. Ferner ist $BC = 253 - 2,1\,x$ m, also $0,4\,x = 2 \,.\, (253 - 2,1\,x)$, $0,2\,x = 253 - 2,1\,x$; $2,3\,x = 253$, $x = 2530 : 23 = 110$ Sek. Es ist recht lehrreich, wenn hier und da eine Aufgabe in solcher Weise auf Grund verschiedener Gedankengänge behandelt wird, um zu zeigen, daß eine Übereinstimmung der Auflösungen bei verschiedenen Schülern keineswegs selbstverständlich ist.

An die bis dahin behandelten Aufgaben schließt man nun zweckmäßig noch eine Reihe von geometrischen Rechnungsaufgaben an. Man hat den eingekleideten Übungsbeispielen der gebräuchlichen Sammlungen mehrfach den Vorwurf der Künstelei gemacht. In der That findet man hier zuweilen die wunderlichsten und unnatürlichsten Zusammenstellungen, sowohl gereimte, als ungereimte, deren vorwiegende Anwendung die Schüler schwerlich je zum Bewußtsein des Wertes des Gelernten gelangen läßt. Ein solches Exempel eines neueren Lehrbuches beginnt z. B.: „Ein Schäfchen weidete im Kohl, — Es war des morgens früh. — Des Nachbars Mops, ein treues Tier, — Gesellte sich dazu." Und dann giebt des Nachbars Mops dem Schäfchen auf 16 Zeilen eine Aufgabe, aus welcher dasselbe sich seine Frage, „wieviel hier Pflanzen

stehn," beantworten soll. Eine andere Aufgabe beginnt: „Ein Gänsrich watschelte in Ruh' — In einem Erlgesträuche; — Da flog ein Gänseschwarm hinzu — Von einem nahen Teiche," und endet damit, daß die eine Gans der anderen eine algebraische Aufgabe über die Anzahl der Gänse zu lösen aufgiebt. Man wird sagen, dies seien Abnormitäten. Gewiß! Aber man sehe sich nur die Mehrzahl der Aufgaben in manchen Sammlungen an, und man wird sich eingestehen müssen, daß der Inhalt derselben sachlich nicht immer viel mehr wert ist. Es soll auch nicht geleugnet werden, daß Aufgaben solcher Sorte durch komischen oder rätselhaften Inhalt die jungen Schüler anregen und selbst als Denkübungen recht nutzbringend verwertet werden können, und wir wollen sie deshalb keineswegs völlig ausschließen. Wir wenden uns nur dagegen, daß man derartige Aufgaben den vorwiegenden Inhalt der betreffenden Abschnitte ausmachen lasse. Allerdings ist die Wahl von Einkleidungen, welche an sich irgendwie bemerkenswert oder nutzbringend sind, sehr schwierig, weil die Heranziehung von Anwendungen auf zahlreiche praktische und wissenschaftliche Gebiete durch den Umstand unmöglich gemacht ist, daß diese Gebiete dem Schüler nicht oder noch nicht hinreichend bekannt sind. Umsomehr scheint es geboten, nach möglichster Heranziehung von solchen Anwendungen zu streben, deren Verständnis auch dem Anfänger ohne wesentlichen Zeitverlust zugänglich zu machen ist, oder die derselbe schon teilweise beherrscht. In dieser Beziehung sind nun namentlich die geometrischen Rechnungsaufgaben zu nennen, durch deren Verbindung mit der Arithmetik zugleich ein Beitrag zur Konzentration des Unterrichts geliefert wird. Oder sollte eine Aufgabe, welche z. B. die Berechnung der Winkel eines Dreiecks aus den Verhältnissen derselben verlangt, nicht nützlicher sein, als etwa diejenige, welche fordert, die Teile einer ganz willkürlichen Zahl aus ihren Verhältnissen zu berechnen? Andere geometrische Aufgaben werden nicht bloß zur Auffrischung und Anwendung von Lehrsätzen, sondern mindestens auch zu einer Vorübung für die algebraische und trigonometrische Analysis geometrischer Konstruktionsaufgaben dienen.

§ 34. Die Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

Bei den angesetzten Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten scheint die Forderung, daß man im Unterricht vom Besonderen zum Allgemeinen fortschreiten solle, von einzelnen Verfassern dahin ausgelegt zu sein, daß man zunächst einfachere Ausnahmefälle üben müsse, ehe man an das allgemein anwendbare Verfahren herantrete. Wir halten dies für ebenso wenig gerechtfertigt, als wenn man in der Geometrie die Zusätze vor die Lehrsätze setzen wollte. Das Einfache, was hier zuerst neu zu lernen ist, ist die regelrechte Elimination; diese muß fest und sicher geübt sein, ehe man ausnahmsweise auftretende

Erleichterungen behandeln darf. Auch das Prinzip des Fortschritts vom Besonderen zum Allgemeinen kann übertrieben werden; man darf nie vergessen, daß dasselbe nur ein didaktisches, nicht ein wissenschaftliches Gebot ist, und daß es überall fallen muß, wo der Grund für dasselbe, nämlich die zum Verständnis von Abstraktionen noch nicht hinreichende Reife der Denkkraft der Schüler, nicht mehr vorhanden ist. Die allgemeinen Eliminationsmethoden bei zwei Gleichungen ersten Grades kann jeder Schüler der betreffenden Altersstufe leicht verstehen; sind dieselben begriffen und eingeübt, so ergeben sich die besonderen Fälle, z. B. wenn die eine der gegebenen Gleichungen nur eine Unbekannte enthält, oder wenn dieselbe Unbekannte in beiden Gleichungen denselben Koefficienten hat, ganz von selbst. In ähnlicher Weise wird man überhaupt im mathematischen Unterricht — und dies sei hier ein für allemal bemerkt — daran zu denken haben, daß der Fortschritt vom Allgemeinen zum Besonderen der wissenschaftlichere ist und den Vorteil der Zeitersparnis gewährt. Diesen Vorteil auch in solchen Fällen aufzugeben, in denen das entgegengesetzte Princip bloß der Konsequenz zu Liebe auf die äußerste Spitze getrieben sein würde, ohne daß die sonst dazu vorhandene Nötigung durch didaktische Gründe vorhanden ist, würde schwerlich als richtig gelten dürfen. Der fortschreitenden Reife der heranwachsenden Schüler müssen auch entsprechend fortschreitende Anforderungen an das Verständnis derselben zur Seite gehen, damit das letztere überall die notwendige Anstrengung und Entwickelung finde. So wird man beispielsweise ja auch im planimetrischen Unterricht einer Obertertia oder gar Sekunda schwerlich den Pythagoreischen Lehrsatz zuerst für ein gleichschenkelig-rechtwinkeliges Dreieck, dann etwa für ein solches mit rationalen Seitenverhältnissen und erst beim drittenmal allgemein beweisen, vielmehr sogleich den für alle Fälle geltenden Beweis geben. Für einen Fortbildungsschulkursus würde jener Lehrgang vielleicht der zweckentsprechende sein, für eine obere Gymnasialklasse aber würde er ohne zwingende Not eine dreifache Arbeit verursachen.

Aus diesen Gründen empfehlen wir, auch die drei oder vier üblichen Eliminationsmethoden zunächst der Reihe nach an solchen Beispielen zu üben, welche keine ausnahmsweisen Erleichterungen des Verfahrens enthalten, und so zunächst eine feste Norm für den vorliegenden Abschnitt zu schaffen.

Ob man eine jener Eliminationsmethoden bevorzugen solle, und welche, kann zweifelhaft sein. Im Grunde geschieht ja bei allen dasselbe, aber die kleinen Verschiedenheiten der Form werden die Ausführung für die Schüler bald bei diesem, bald bei jenem Verfahren etwas erleichtern. Besonders häufig dürfte die Additions- und Subtraktionsmethode als die praktischste bevorzugt werden, aber auch die Substitutionsmethode ist hier und da die einfachere, z. B. bei der später zu übenden Auflösung von zwei Gleichungen, von denen nur eine vom ersten, die andere aber vom zweiten Grade ist. Ebenso wird

man für manche spätere Fälle die Kombinationsmethode nicht gern entbehren; man wird z. B. bei trigonometrischen Gleichungen es manchmal besonders zweckmäßig finden, zwei solche auf dieselbe vorkommende Funktion der einen Unbekannten aufzulösen und die beiden Ausdrücke einander gleichzusetzen. — Die Bezoutsche Methode dürfte am ersten entbehrt und da, wo Determinanten gelehrt werden sollen, als Vorbereitung zu diesen nachzuholen sein.

Man lehre also vorerst jene drei Methoden nacheinander, zeige aber dann an einzelnen Beispielen besonderer Art, wie die eine oder die andere besonders zweckmäßige Anwendung findet. Die Aufgabe z. B., zwei Zahlen aus ihrer Summe und ihrer Differenz zu finden, wird wohl niemand anders als mittels Addition und Subtraktion lösen wollen, und dasselbe gilt in den meisten Fällen, in welchen die Koefficienten einer Unbekannten in beiden Gleichungen nur durch leicht ersichtbare Faktoren verschieden sind.

Die eben genannte Aufgabe $x + y = a$, $x - y = b$ ist wegen ihrer so häufigen Anwendung an verschiedenen Beispielen zu üben, bis ihre Resultate gedächtnismäßig behalten werden. Es wird nichts schaden, wenn ähnliches auch mit einigen anderen Fundamentalaufgaben geschieht. Die Auflösung von $x + y = a$, $x : y = m : n$ z. B. ist identisch mit der Teilung der Größe a in gegebenem Verhältnis; die Resultate $\frac{a}{m+n} \cdot m$, $\frac{a}{m+n} \cdot n$ geben dafür die schon aus der Verteilungsrechnung bekannte Regel. Wird der Schüler angeleitet, sich dieselben jederzeit ohne Mühe zu wiederholen, so wird er beispielsweise später aus den drei Seiten eines Dreiecks ohne weiteres die Ausdrücke für die Strecken bilden können, in welche irgend eine derselben durch die zugehörige Winkelhalbierende geteilt wird, oder aus $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ und $a + b = s$ die Werte für a und b (wenn auch noch nicht in der logarithmisch bequemen Form) ohne Rechnung hinschreiben. — Auch die von Bardey besonders entwickelte sogenannte korrespondierende Addition bietet manche Vorteile für die rasche Erledigung einzelner Aufgabengruppen, und ist daher, wo die nötige Zeit zu Gebote steht, einer besonderen Pflege wohl wert.

Das Unterrichtsverfahren wird im allgemeinen bei diesem Abschnitte darin bestehen, daß man zuerst eine der Eliminationsmethoden in der Stunde an einem ausgeführten Beispiele erläutert und dazu eine Anzahl einfacher angesetzter Aufgaben mit den Schülern gemeinschaftlich rechnet. Letzteres geschieht teils dadurch, daß der Lehrer an der Tafel schreibt und sich dazu die einzelnen Entwickelungen und Zahlen von den Schülern in buntem Wechsel als Antworten auf passend gestellte Fragen sagen läßt, teils durch Vorrechnen einzelner Schüler an der Tafel, wobei der Lehrer nur nötigenfalls einhilft und die übrigen Schüler durch Zwischenfragen oder Aufforderungen zur Einhilfe oder Korrektur veranlaßt, der Thätigkeit des Vorrechners zu folgen. Dann

läßt man die Schüler, ebenfalls in der Stunde, auch leichte Aufgaben auf dem Papier rechnen, um zu sehen, ob sie das Vorgetragene ganz selbständig ausführen gelernt haben und um diese Selbständigkeit zugleich mit der erforderlichen Raschheit und Sicherheit des Arbeitens zu üben. Ist so eine Methode völlig zum Eigentum der Schüler geworden, so wird die zweite und dann die dritte in gleicher Weise behandelt. Entsprechende häusliche Aufgaben dienen dazwischen zu weiterer Übung und zu rascherem Fortschritt. Es folgt dann die Behandlung einfacher Aufgaben mit Auswahl der Methoden, wobei die besonderen Fälle und Ausnahmen mit ihren Abkürzungen und Erleichterungen geübt werden, darauf verwickeltere Aufgaben, in denen zwar nichts wesentlich Neues zu dem Vorhergehenden hinzukommt, aber das Ordnen von Gleichungen mit zwei Unbekannten vor der Ausführung der Elimination geübt wird, und auch manche Abkürzungen, z. B. durch das Einführen zusammengesetzter Ausdrücke als neue Unbekannte, oder selbst Abweichungen im Eliminationsverfahren (wie durch Verbindung zweier Gleichungen mittels Division, wenn dadurch eine Unbekannte als gemeinsamer Faktor wegfällt) u. dgl. m. vorkommen können. Daran schließen sich endlich eingekleidete Aufgaben, bei denen es, wie früher, zweckmäßig ist, bestimmte Gruppen zu bilden, welche bestimmten Beziehungsgebieten zwischen vorkommenden Größen angehören. Auch die Anwendung auf geometrische Aufgaben wird hier aufs neue einen passenden Platz finden.

In betreff der Anleitung zum Ansetzen der Gleichungen wird es nur der Bemerkung bedürfen, daß jede Aufgabe jetzt zwei getrennte Angaben über die Beziehungen zwischen den gesuchten und den gegebenen Größen enthalten muß, und daß dieselben gesondert aufzusuchen und durch zwei Gleichsetzungen algebraisch darzustellen sind.

Man wird auch erkennen, daß man hier und da in der Lage ist, bei solchen Aufgaben mit einer einzigen Unbekannten auszukommen, zugleich aber auch, daß in solchen Fällen thatsächlich nichts anderes geschieht, als daß man die Elimination der anderen Unbekannten sofort im Kopfe mittels der Substitutionsmethode ausführt.

Die Behandlung von Gleichungen ersten Grades mit drei oder mehr Unbekannten bietet nun an sich keinen besonderen Anlaß zu Bemerkungen. Die mechanische Arbeit wächst mit der Anzahl der gesuchten Größen rasch und wird bald für die Schule unerträglich. Man hat sich daher, zumal keine wesentlich neuen bildenden Momente auftreten, vor Überlastung der Schüler durch zu umfangreiche häusliche Aufgaben, sowie vor Zeitverschwendung durch eine zu ausgedehnte Behandlung des Gebietes in den Stunden zu hüten. Auch werden die einfacheren und Ausnahmefälle hier wegen der Erleichterungen des Verfahrens und der häufigeren Gelegenheit zum Vorkommen an Bedeutung gewinnen.

Hier tritt nun die Frage auf, ob man nicht jene umfangreichen

mechanischen Arbeiten für den praktischen Gebrauch ganz beseitigen solle, indem man die Anfangsgründe der Lehre von den Determinanten in das Unterrichtspensum aufnimmt. Die Vorzüge allgemeiner Rechnungen sind schon früher erkannt worden; so liegt der Gedanke ziemlich nahe, auch für n lineare Gleichungen mit n Unbekannten allgemeine Resultatformeln in Buchstabenausdrücken aufzustellen, in welche man dann für jedes besondere Beispiel nur die einzelnen Zahlenwerte einzusetzen habe. Die Ausführung dieses Gedankens in stufenweisem Aufsteigen nach der Anzahl der Unbekannten führt auf den Begriff und auf die in Rede stehende elementarste Anwendung der Determinanten. Die Untersuchung der wichtigsten Eigenschaften der letzteren und der Gesetze des Rechnens mit denselben hätte sich dann zum Zwecke der Erleichterung ihrer Auswertung und zu weiteren elementaren Anwendungen (z. B. auf die Theorie der quadratischen Gleichungen) früher oder später anzuschließen.

Es ist wohl gewiß, daß die Einführung der Determinanten in den Schulunterricht, falls sie überhaupt erfolgen soll, auf dem eben angegebenen Wege oder einem ähnlichen zu geschehen hat, denn derselbe entspricht den allgemeinen Unterrichtsgrundsätzen für die Schüler der betreffenden Stufen. Ein derartiger Lehrgang ist deshalb vom Verfasser dieses Buches in seinem Schriftchen „Vorschule der Theorie der Determinanten, Leipzig, B. G. Teubner“, sowie von anderen Autoren, z. B. von Heilermann und Diekmann in deren „Lehr- und Übungsbuch für den Unterricht in der Algebra“ versucht worden. Wir geben im folgenden noch einige andere mehr oder minder ausführliche Schriften an, aus welchen sich der Anfänger über verschiedene Behandlungsweisen der Determinantenlehre für verschieden weit gehende Zwecke unterweisen kann:

1. Hesse, Die Determinanten, elementar behandelt. Leipzig, Teubner.

Der als wissenschaftlicher Mathematiker hochberühmte verstorbene Verf. behandelt hier die Elemente der Determinantentheorie für die Zwecke der bairischen Realgymnasien in sehr gedrängter Weise. Die Darstellung ist elegant, aber auch sehr abstrakt und aus diesem letzteren Grunde für unsere Schulen wenig geeignet.

2. Dölp, Die Determinanten, elementar behandelt; bearbeitet von Soldan. Darmstadt, Brill.

3. Hattendorf, Einleitung in die Lehre von den Determinanten. Hannover, Schmort und Seefeld.

4. Mansion, Elemente der Theorie der Determinanten. Leipzig, Teubner.

Für ein weitergehendes Studium dienen die umfangreicheren Determinantenwerke von Diekmann, Günther und Baltzer, die wir hier nur des etwaigen Gebrauchs für angehende Mathematiker wegen anführen.

Die Hauptfrage, ob die Determinanten überhaupt an den höheren Schulen gelehrt werden sollen, ist, wie wir schon früher bemerkt haben,

sehr abweichend, anscheinend jedoch von der Mehrzahl der Stimmen verneinend entschieden worden. Zu näherer Kenntnisnahme der für und wider geltend gemachten Gründe verweisen wir auf die zum Teil längeren Artikel in der Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht (Jahrgang VI, XI, XII und XIII).

Vielleicht wird dahin eine Übereinstimmung zu erzielen sein, daß bei der gegenwärtigen Stundenzahl und dem Reichtum des mit derselben bereits zu erledigenden Pensums die Determinanten nicht dem letzteren obligatorisch eingefügt werden können. Für besonders günstige Fälle, in denen ihre Behandlung ohne Schädigung anderer den allgemeinen Aufgaben der Schule in höherem Grade förderlicher Partien möglich erscheint, mögen sie jedoch gestattet werden.

§ 35. Die Gleichungen zweiten Grades.

Die Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten wird man wohl allgemein mit rein quadratischen Gleichungen beginnen, an denen man auf die einfachste Weise die Zweideutigkeit des Resultats, sowie die Zerlegung des Polynoms in zwei Faktoren erläutert. Für die gemischten Gleichungen bildet das die quadratische Ergänzung benutzende Verfahren einen so einfachen Eingang, daß dasselbe wohl von den meisten angewendet wird. Man lasse dasselbe zuerst an einer Reihe von bestimmten Beispielen jedesmal vollständig ausführen, ehe man zur Auflösung der allgemeinen Gleichung $x^2 + px = q$ übergeht und die zu ihr gehörige Resultatformel als Rechnungsregel anwenden läßt. Die letztere schreibt man zweckmäßig

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}, \quad \text{oder } x = \tfrac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2 + 4q}\right),$$

sodaß also auf die Größe $\frac{p}{2}$ das aus ihr zu berechnende Quadrat $\frac{p^2}{4}$ sogleich folgt. Nachdem der Gebrauch dieser Formel an einer hinreichenden Anzahl verschiedenartiger Aufgaben — geordneten und erst zu ordnenden, numerischen und solchen mit Buchstaben, mit positiven und negativen Werten von p und q u. s. w. — bis zur Fertigkeit geübt ist, schließe man die hierdurch schon vorbereitete Diskussion der Formel an, bei welcher der Fall $x^2 + px = -q$ mit den drei Unterfällen, in denen $\frac{1}{4}p^2$ bezügl. ebensogroß, kleiner oder größer als q ist, recht gründlich an Beispielen behandelt werden muß. Auch der Fall $q = 0$ mit der Wurzel $x = 0$ bedarf einer hervorhebenden Behandlung, da er, z. B. bei trigonometrischen und stereometrischen Aufgaben, nicht gerade selten vorkommt, und die Schüler dann gern den unbekannten Faktor ohne weiteres wegdividieren. Zur Erläuterung der einzelnen Fälle eignen sich besonders eingekleidete Aufgaben aus der Geometrie, welche durch beigefügte Figuren die Sachlage anschaulich

erläutern. Hier findet auch die Anwendung der Bedingung $p^2 \gtreqless 4q$ zur elementaren Bestimmung von Maximis und Minimis eine passende Stelle.

Man wird ferner den Satz, daß die Summe der Wurzeln gleich $-p$, das Produkt derselben gleich $-q$ ist, die Zerlegung des Polynoms der Gleichung in zwei Faktoren und die Bildung von Gleichungen zu gegebenen Wurzeln im Zusammenhang behandeln und sonstige Ergänzungen anschließen (Gleichungen von der Form $x^{2n} + px^n = q$ u. a. m.). Die Anwendung auf geometrische Aufgaben wird sich vielleicht im Anschluß an die entsprechenden Konstruktionsaufgaben und ihre Auflösung mittels der geometrischen Deutung der algebraischen Resultate behandeln lassen. Hierbei giebt der obige Satz über die Beziehungen zwischen den Wurzeln und den Koefficienten der Gleichung Gelegenheit zu einer hübschen allgemeinen graphischen Auflösung mittels der Potenzen beim Kreise. (Man vergl. darüber u. a. des Verf. Elemente der Mathematik, Teil 2, Anhang 5, S. 129 der 8. Aufl.) — Auf solche Weise werden die beiden bis dahin meist nebeneinander herlaufenden Unterrichtszweige in innige Wechselwirkung gebracht, und die späteren trigonometrischen und analytisch-geometrischen Rechnungen zweckmäßig vorbereitet.

Selbstverständlich sollen sich die eingekleideten Aufgaben dieses Abschnitts nicht auf geometrische beschränken; man wird vielmehr auch hier noch andere Übungsgebiete gemäß der gebrauchten Aufgabensammlung in stufenweisem Fortschritt teils vorangehen, teils nachfolgen lassen.

Eine besondere Bemerkung verdienen noch die negativen Resultate. Wo dieselben zu verwerfen sind, ist der Grund dafür aus der betreffenden Bestimmung der Aufgabe über die Art der gesuchten Größe anzugeben. Man mache die Schüler darauf aufmerksam, daß eine Aufgabe Bedingungen enthalten kann, welche bei dem Ansetzen der Gleichung vorerst ganz unberücksichtigt gelassen und daher nachträglich noch herangezogen werden müssen, nachdem die Auflösung alle der Gleichung für sich genügenden Resultate geliefert hat. Dies ist zugleich eine Vorbereitung zu den Diophantischen Aufgaben. — Ergiebt sich so, daß ein negatives Resultat ausgeschlossen werden muß, so ist es für Schüler eine gute Denkübung, zu ermitteln, ob sich durch Abänderung der beschränkenden Bedingung eine entsprechende Aufgabe bilden läßt, welcher das negative Resultat zugehört, und ob demnach die Beseitigung jener Bedingung zu einer umfassenderen Aufgabe führt.

Die allgemeine Auflösung quadratischer Gleichungen mit zwei Unbekannten führt bekanntlich auf eine Eliminationsgleichung vierten Grades und entzieht sich dem gewöhnlichen elementaren Unterricht. Es können hier also nur Aufgaben besonderer Art behandelt werden, und es fragt sich, ob man in der Schule etwa mit Hilfe der Determinanten (nach Diekmann in der Zeitschr. f. math. und naturw. Unterricht XIII, S. 259) diejenigen Kategorien von Gleichungen all-

gemein aufstellen und auch in entsprechender Weise auflösen soll, welche den gewöhnlichen elementaren Mitteln zugänglich gemacht werden können. Uns scheint, als ob dieses Verfahren einen größeren Aufwand von Zeit und Mühe erfordere, als im allgemeinen auf das in Rede stehende Gebiet verwendet werden kann, und daß es hinreiche, eine Anzahl solcher Gleichungen, namentlich von denjenigen, welche in der Anwendung häufiger vorkommen, auszuwählen und nach bestimmten Gruppen zu ordnen, für deren Behandlung dann die geeigneten Wege im einzelnen zu zeigen sind. So möchten beispielsweise die neun von dem Verf. in seiner „Aufgabensammlung zur Arithmetik und Algebra" benutzten Gruppen mit der zu denselben angegebenen Behandlungsweise genügen, um ein reiches Übungsfeld zu erschließen und alle weiterhin etwa vorkommenden Anwendungen zu ermöglichen.

§ 36. Gleichungen dritten Grades, Diophantische Aufgaben und Exponentialgleichungen.

Die Gleichungen dritten Grades werden im allgemeinen nur an den Realanstalten und in den obersten Klassen derselben gelehrt werden können, ihre methodische Behandlung wird daher keiner eingehenden Erörterung weiter bedürfen. Ein anregendes Schriftchen, namentlich in betreff eingekleideter Aufgaben ist „Lampe, Geometrische Aufgaben zu den kubischen Gleichungen. Berlin, H. W. Müller".

Im übrigen verweisen wir in betreff eines stufenmäßigen Lehrgangs und über die dem Unterrichte auf diesem Gebiete zu gebende Ausdehnung auf die verschiedenen besseren Lehrbücher.

Als Anhänge zur Algebra können die Diophantischen Aufgaben und die Exponentialgleichungen behandelt werden. In betreff der ersteren wird man sich in der Regel auf solche ersten Grades beschränken; diejenigen des zweiten Grades können überhaupt auf der Schule höchstens für einzelne leichtere Fälle behandelt werden, da sie im übrigen weitergehende Hilfsmittel erfordern.

Für die Diophantischen Aufgaben ersten Grades ist eine Reihe verschiedener Methoden bekannt, unter denen jedoch für Unterrichtszwecke wohl nur die gewöhnliche Eulersche und diejenige mittels der Kettenbrüche von Lagrange im Gebrauche und empfehlenswert sind. Man hat mehrfach die letztere als die wissenschaftlichere und für die Praxis bequemere empfohlen, und wer dem zustimmt, kann natürlich die unbestimmten Aufgaben nicht schon an der hier behandelten Stelle des Unterrichts bringen, vorausgesetzt daß er nicht auch den Kettenbrüchen schon einen früheren Platz anweist. Es ist aber gerade ein besonderer Vorzug der Eulerschen Methode, daß sie es ermöglicht, das hübsche und anregende Gebiet mit so geringen Hilfsmitteln, daher verhältnismäßig früh zu behandeln und dasselbe in unmittelbaren Anschluß an das nahe verwandte der bestimmten Gleichungsaufgaben zu

bringen. Ferner ist dasselbe für Schüler das natürlichere und leichter genetisch zu behandeln, während die Methode der Kettenbrüche denselben mehr als Kunststück erscheinen wird. Endlich ist auch der Vorwurf der größeren Weitläufigkeit unbegründet, wenn man, wie Bardey in seinen Arithmetischen Aufgaben gezeigt hat, die zu Gebote stehenden Abkürzungen benutzt.

Über die methodische Behandlung des Verfahrens mit Kettenbrüchen findet man lesenswerte Aufsätze in der Zeitschrift f. math. und naturw. Untereicht, von denen wir die von Pietzker in Jahrg. XVI, S. 401 und von Emmerich XVI, S. 584 hervorheben, weil sie eine praktische Vereinfachung in der Unterweisung behandeln. Dieselbe wird denjenigen Lehrern von Interesse sein, welche die praktischen Übungen nicht an die Eulersche Methode anknüpfen und daher sich bei den Kettenbrüchen nicht auf eine möglichst kurze Darlegung des Prinzips beschränken wollen. (Man vergl. auch dieselbe Zeitschrift IX, 105, 194, 367 und XVII, 20.)

Die Exponentialgleichungen können, wenn die Lehre von den Logarithmen vorausgegangen ist, unter die einzelnen Abschnitte der anderen Gleichungen je nach deren Grad und Unbekannten-Anzahl verteilt, d. h. denselben als Ergänzung angefügt werden. Stellt man jedoch, wie früher vorgeschlagen, die Gleichungen ersten Grades vor die Operationen dritter Stufe, und schließt man, wie ebenfalls der unmittelbaren Anwendung des Vorhergegangenen wegen zu empfehlen ist, die quadratischen Gleichungen dem Abschnitt über das Radicieren an, so haben die Exponentialgleichungen zusammenhängend der Lehre von den Logarithmen, zugleich zu deren Anwendung und Übung zu folgen.

Schubert hat sogar vorgeschlagen, der allgemeinen Behandlung der Operationen dritter Stufe einen Abschnitt „Quadratisches" vorhergehen zu lassen, welcher die besonderen auf Quadrate und Quadratwurzeln, einschließlich der quadratischen Gleichungen bezüglichen Lehren wegen ihrer hervorragenden Wichtigkeit und ihres häufigen Vorkommens, sowie als einfachsten Fall für sich behandeln solle, und diesen Lehrgang, welcher nicht ohne ihn empfehlende Vorzüge ist, hat der genannte Autor in seiner schon früher (S. 116) citierten Aufgabensammlung auch praktisch ausgeführt.

d) Anfangsgründe der niederen Analysis.

§ 37. Die arithmetischen und die geometrischen Reihen.

Die Lehre von den Reihen oder, wie man früher lieber sagte, von den Progressionen beschränkt sich im Gymnasialunterricht in der Regel auf die arithmetischen Reihen erster Ordnung, die geometrischen Reihen und die einfachsten Anwendungen derselben. Die Formeln für das allgemeine Glied und das Summenglied treten hier zuerst als

die Resultate der bestimmten Aufgaben auf, diese Größen zu berechnen, ohne daß die Angabe und die Addition der einzelnen Glieder nötig ist; sie sind aber dann als Beziehungsgleichungen zwischen den einzelnen Bestimmungsdaten der Reihen aufzufassen, durch welche jedes beliebige Paar derselben als Unbekannte aus den drei übrigen berechnet werden kann. An die Behandlung der zehn Aufgaben, auf welche man hierdurch jedesmal geführt wird, schließt man zu weiterer Übung zweckmäßig eine Reihe zusammengesetzterer an, z. B. solche, bei welchen die drei Bestimmungsstücke nicht unmittelbar gegeben sind, sondern selbst erst aus anzusetzenden Gleichungen gefunden werden müssen.

Die geometrischen Reihen bieten namentlich Gelegenheit zu Exkursen auf andere Gebiete, welche man nicht um deshalb gering schätzen soll, weil sie mehr oder minder von dem rein mathematischen Stoffe abführen. Sie haben ihren großen Wert durch die Anregung des Interesses und auch sonst durch die Erweiterung des geistigen Horizonts der Schüler. Bei der steigenden geometrischen Reihe fällt zunächst das mit der wachsenden Gliederzahl beschleunigte Zunehmen der Glieder (und der Summe) im Gegensatz zu dem gleichmäßigen bei der arithmetischen Reihe auf; die graphische Darstellung thut hierbei zur Erläuterung gute Dienste. Die einfachste derartige Reihe 1, 2, 4, 8, 16, ... wird hierbei typisch sein, das bekannte Exempel vom Schachbrett immer wieder eines der ersten praktischen Beispiele bilden. Hieran nun lassen sich u. a. Beispiele und Erörterungen knüpfen über die Verbreitung von Pflanzen und Tieren, der Nachweis, daß jede Spezies bei ungehinderter Vermehrung binnen kurzer Zeit allein die ganze Erde in Anspruch nehmen würde, daß die Natur demnach anscheinend mit kolossaler Verschwendung von Keimen lebender Wesen wirkt, deren bei weitem größter Teil von vorneherein dazu verurteilt ist, in dem notwendig gewordenen Kampfe ums Dasein zu unterliegen, daß aber das Aufgebot so gewaltiger Mittel die Sicherung der Existenz der Art und Gattung bezweckt. Man kann ferner daran erinnern, wie das Gesetz der geometrischen Reihe es erklärt, daß bei zeitweiliger oder lokaler Schwächung, bezw. Aufhebung der hemmenden Ursachen eine Tier- oder Pflanzenspezies innerhalb kurzer Zeit in kolossalen Mengen auftreten muß; die wandernden Schwärme von mancherlei Tierarten, die rasche Erfüllung faulender Substanzen mit durch Teilung sich vermehrenden mikroskopischen Lebewesen, die außerordentliche Ausbreitung ansteckender Krankheiten durch die Vermehrung ihrer organischen Träger, die rasche Besiedelung wüst liegender Strecken u. dgl. m. finden, wenn auch nur in kurzen Andeutungen, ihre Erklärung auf Grund mathematischer Gesetze. Selbst triviale Dinge aus dem Getriebe des Menschenlebens können anregend wirken: der Spieler, der die unfehlbare Kunst des Gewinnens bei Hazardspielen in der Theorie des Doublierens entdeckt hat, benutzt den mathematischen Satz, daß in der Reihe 1, 2, 4, 8, ... jedes Glied die Summe aller vorhergehenden immer um

1 übertrifft, aber die Langsamkeit des Gewinns lohnt nicht die aufgewendete Zeit, und die steigende geometrische Reihe droht mit der Gefahr, daß ihre Summe das aufwendbare Einsatzkapital übersteigt. Warum soll man dem Primaner, der meist sich schon reif genug für derartige Dinge fühlt, nicht durch solche Erörterungen ein bischen Schutz gegen Irrwege in seiner demnächstigen Freiheit mitgeben dürfen? Wir werden auf diese Frage noch einmal zurückkommen.

Die fallende geometrische Reihe ist noch lehrreicher als die steigende. Hier wird als einfachstes Beispiel $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ typisch sein. Der Trugschluß des Zeno fehlt wohl in keiner Aufgabensammlung. Für die Wissenschaft selbst ist hier die beste Gelegenheit, den Begriff der Grenze aufs neue möglichst klar zu stellen, dessen Erkenntnis geradezu als eine der Grundlagen der neueren Mathematik und damit des Kulturfortschritts der Menschheit bezeichnet werden kann. Die obige Reihe macht durch die fortschreitende Angabe, wieviel der Summe der Glieder noch an 2 fehle, diesen Begriff auf die einfachste Weise klar. — Die Unterscheidung der Konvergenz und Divergenz der Reihen findet nirgends einen besseren Anknüpfungspunkt für das Verständnis, wie z. B. durch den Vergleich der obigen Reihe mit $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$, deren Divergenz so leicht nachzuweisen ist.

Auch zu einer Verknüpfung des mathematischen und des physikalischen Unterrichts bieten die Reihen besonders günstige Gelegenheit. Als Beispiele führen wir die Gesetze der gleichförmig beschleunigten Bewegung (insbesondere des freien Falls) und die Berechnung der Dichtigkeit der Luft unter dem Recipienten einer Luftpumpe an. Daß die unendlichen geometrischen Reihen auch auf geometrische Aufgaben in mannigfaltiger Weise angewendet werden können, ist ebenfalls bekannt.

Unter den Anwendungen der geometrischen Reihen bildet die Zinseszins- und die Rentenrechnung in der Regel einen besonderen größeren Abschnitt des Unterrichtspensums. Die Gleichung $C = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ ist wieder als Beziehungsgleichung aufzufassen und für die drei Umkehrungsaufgaben in der früher gezeigten Weise im Kopfe aufzulösen.

Für eine gebrochene Anzahl von Zinsterminen ist die gewöhnlich benutzte Formel

$$C = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{r}{s}\right)$$

falsch, denn die vor Ablauf des vereinbarten Zinstermines gezahlten Teilzinsen müssen auf den Schluß des vollen Termins diskontiert werden; die Ausführung der betreffenden Rechnung zeigt, daß die erste Formel allgemein anzuwenden ist. Hierdurch werden auch die Auflösungen der Umkehrungsaufgaben erleichtert und ermöglicht. Soll z. B. p bei einer gebrochenen Anzahl von Zinsterminen gesucht werden,

so führt die Anwendung der zweiten Formel auf ein umständliches Näherungsverfahren; wird n gesucht, so dürfte die erste niemals angewendet werden, wenn nicht vorher feststeht, daß n eine ganze Zahl ist. Man wird also gut thun, die einfachere Gleichung in allen Fällen anwenden zu lassen und die in der Praxis übliche nur nebenher zu erwähnen, vielleicht auch für die Fundamentalaufgaben an ein paar Beispielen zu üben.

Wird dem auf Zinseszinsen ausgeliehenen Kapital K am Ende eines jeden Termins der konstante Betrag $\pm a$ hinzugefügt, so erhält man eine Gleichung, welche zweckmäßig in der Form

$$C = Kq^n \pm a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

geschrieben wird, indem man sich der Abkürzung $q = 1 + \frac{p}{100}$ bedient. In dieser Form wird sie sehr leicht behalten, weil sie aus zwei schon anderweit — bei der obigen Formel für die Zinseszinsen und bei der Summenformel für geometrische Reihen — gemerkten Gliedern besteht. Entsprechend schreibt man die Rentenformel

$$Kq^n = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Die einzelnen hiernach zu lösenden Aufgaben bedürfen nach dem vorhergegangenen keiner weiteren methodischen Erläuterung.

Die Kettenbrüche gehören zu denjenigen Abschnitten, welche für die Schule entbehrt werden können, wenn es darauf ankommt, für andere Gebiete Zeit zu schaffen, die man für wichtiger und bildender hält. Da man sich in der Schule wohl überall auf die einfachen Kettenbrüche und deren wichtigste Anwendungen beschränkt, so wird der Gewinn freilich kein sehr großer sein. Auch wird mancher diesen Abschnitt nicht gern entbehren, weil er in der Theorie zur Übung des sonst wenig auftretenden Schlusses von n auf $n + 1$ mehrfache Gelegenheit bietet und in der Anwendung gestattet, den Schülern auf sehr einfache Weise ein Verfahren zu erläutern, aus welchem dieselben die Möglichkeit ersehen, eine numerische Gleichung höheren Grades näherungsweise auflösen oder einen Logarithmus (auch außerhalb der Reihenfolge) berechnen zu können. Es werden also auf diesem Wege frühere Lücken ausgefüllt, wenn auch die praktische Ausführung derartiger Rechnungen wegen der Weitläufigkeit des Verfahrens nicht an einer Reihe von Beispielen eingeübt zu werden braucht. Auch die einfacheren Anwendungen, die Bestimmung von Näherungsbrüchen für gemeine Brüche mit vielziffrigen Bestandteilen unter Angabe der Fehlergrenzen, die Verwandlung einer Quadratwurzel in einen Kettenbruch und umgekehrt die Darstellung der Werte periodischer Kettenbrüche durch geschlossene Ausdrücke bieten doch manches in eigenartiger Weise Anregende.

§ 38. Kombinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Auch die Kombinationslehre mit ihrer Anwendung in den Elementen der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird von verschiedenen Stimmen für entbehrlich erklärt. Beide können allerdings wegfallen, ohne daß eine Störung in dem zusammenhängenden Aufbau des Lehrgebäudes entsteht, und beide bieten auch wenig Gelegenheit zur späteren Verwertung in anderen mathematischen Disciplinen des Schulunterrichts. Dagegen sind sie nicht ohne Wert für die allgemeine Ausbildung in richtigem, wissenschaftlichem Denken, und zwar nach Richtungen, für welche sonst wenig geschieht.

Die Übungen im Permutieren und Kombinieren können freilich dem Schüler nicht die Befähigung geben, in den Fragen des praktischen Lebens und der Wissenschaft die gesamte Zahl aller einzelnen möglichen Fälle mit raschem Blicke zu überschauen und zu beurteilen; schon bei verhältnismäßig geringer Anzahl der Elemente wird ja bekanntlich diejenige der Komplexionen so groß, daß dieselben im einzelnen gar nicht mehr übersehen werden können. Um z. B. sämtliche Permutationen von 10 verschiedenen Elementen nur hinzuschreiben, wären bei zehnstündiger täglicher Arbeit und wenn in jeder Minute sechs derselben geschrieben würden, fast drei Jahre nötig. Dagegen ist die Aufstellung der Gesetze, nach welchen eine geordnete und vollständige Reihe der Komplexionen gebildet werden kann, auch praktisch von erheblichem Wert; sie lehrt eine geeignete Bildung von Gruppen, von denen diese oder jene in praktischen Fällen vielleicht von vorneherein ausgeschieden, andere gemeinschaftlich behandelt werden können. Eine gewisse Übung in diesem gesetzmäßigen Fortschreiten bei dem Kombinieren gegebener Fälle ist durchaus nicht zu verachten; sie sichert die erschöpfende Behandlung eines Denkgebiets nach seinen verschiedenen Seiten, indem sie vor dem Übersehen einzelner schützt, und sie gewährt auch in praktischen Fragen wenigstens eine bessere Befähigung zum Überblick und damit zur Beurteilung möglicher oder beachtenswerter Fälle oder Gruppen, zur Ordnung und Vollständigkeit der Disposition u. s. w., als bei dem Mangel einer Regel vorhanden sein würde. Daß diese geistige Befähigung der Ausbildung bedarf und eine solche durch die Beschäftigung mit dem vorliegenden Gebiete erfährt, läßt sich auch im mathematischen Unterricht der Schule leicht erproben. Man fordere einen Sekundaner z. B. auf, die verschiedenen Einzelaufgaben des Apollonischen Problems aufzuzählen, also die Kombinationen der drei Elemente Kreis, Gerade und Punkt zur dritten Klasse mit Wiederholungen zu bilden, ohne daß er dazu eigens angeleitet worden, und vergleiche mit der schwankenden Art des Arbeitens, welche dabei in der Regel auftreten wird, die Sicherheit, mit welcher nach einem kurzen Unterricht in der Kombinationslehre viel schwierigere Aufgaben gelöst

werden. Kommt dem Lernenden aber nicht zum klaren Bewußtsein, daß ein Untersuchungsgebiet durch geordnete Aufzählung und Behandlung aller auftretenden Fälle erschöpft ist, erblickt er in der Auswahl der letzteren nicht mehr als ein Herausgreifen nach Willkür, so ist seine wissenschaftliche Erkenntnis mangelhaft.

Der Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit und die Kenntnis wenigstens der einfachsten Prinzipien, nach denen dieselbe zu berechnen oder zu schätzen ist, bildet ebenfalls eine Grundlage für den Erwerb richtiger Erkenntnisse. Es ist nicht die Aufgabe dieses Abschnitts im Unterricht, die Schüler zur Ausrechnung von Exempeln über die Wahrscheinlichkeiten bestimmter Würfe mit Würfeln oder des Ziehens von Karten u. dgl. anzuleiten; alle derartigen Exempel sind nur Mittel zum Zweck. Die meisten Urteile und Schlüsse der Menschen im praktischen Verkehr, wie auch in den Wissenschaften, beruhen nicht auf Gewißheit, sondern nur auf einer größeren oder geringeren Wahrscheinlichkeit. Nach dem oft nur unklar geschätzten Grade der letzteren für das Eintreffen eines erwarteten Ereignisses richtet der Einzelne meist seine Entschließungen; Erfolg oder Mißerfolg im Leben sind nicht selten mit bedingt durch die annähernde Richtigkeit oder durch grobe Fehler jener Schätzung. Der betreffende Schulunterricht kann zwar selbstverständlich nicht den Zweck verfolgen und erreichen, daß die Schätzung durch eine ziffermäßige Berechnung ersetzt werde; eine solche ist in derartigen Fällen ja meist an sich nicht ausführbar und wird in der Regel nur da möglich, wo die Statistik die Handhabe für eine Wahrscheinlichkeit a posteriori bietet. Es ist aber immerhin ein Unterschied, ob jene Schätzung mit einem größeren oder geringeren Grade von Bewußtsein und von Kenntnis der zu Grunde liegenden Prinzipien erfolge. Eine Hauptrolle spielt hierbei die Einsicht in das Gesetz der großen Zahlen, welches ja auch die Grundlage der wichtigsten praktischen Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist. Aus ihm ergiebt sich die Notwendigkeit, alle induktiven Schlüsse auf eine möglichst große Anzahl von Einzelerfahrungen zu stützen. Die meisten Menschen sind nur zu sehr geneigt, aus einer kleinen Anzahl von Beobachtungen sofort allgemeine Folgerungen zu ziehen und dann infolge der psychologischen Einwirkung der vorgefaßten Meinung auf das Wahrnehmen und auf das Gedächtnis zu der Ansicht zu gelangen, daß ein ursächlicher Zusammenhang als Ergebnis ausnahmsloser Wahrnehmung nachgewiesen sei. Welche Menge von Irrtümern, abergläubischen Meinungen und falschen Handlungen beruht auf diesem Fehler! Gegen ihn nun kann die Wahrscheinlichkeitsrechnung mit einigem Erfolge ins Feld geführt werden; ein Beispiel mag dies erläutern: Jemand stellt die bekannte Ansicht auf, daß der Witterungswechsel vom Mondwechsel abhänge. Da ein kausaler Zusammenhang nicht unbestritten nachweisbar ist, so beruft er sich auf die Erfahrung. Der auf dieselbe gegründete Schluß ist aber nur ein Wahrscheinlichkeitsschluß a posteriori,

dessen Wert von der Anzahl der Beobachtungen abhängt. Damit er einen solchen Wert erhalte, sind diese Beobachtungen nicht gelegentlich hier und da zu machen und nur durch die Erinnerung aufzubewahren, welche durch die vorgefaßte Meinung beeinflußt wird, sondern es ist regelmäßig zu beobachten und darüber Buch zu führen. Trifft hierbei etwa unter 1000 Fällen 150 mal ein Witterungswechsel mit dem Wechsel einer Mondphase zusammen, so ist die sich daraus ergebende Wahrscheinlichkeit a posteriori für ein ferneres gleichzeitiges Eintreten beider (gleich $\frac{3}{20}$ oder nahe $\frac{1}{7}$) zugleich der Nachweis dafür, daß ein kausaler Zusammenhang durch die Beobachtung in keiner Weise gestützt wird. Denn da etwa alle 7 Tage ein Mondwechsel stattfindet, so ist zu erwarten, daß ein von demselben ganz unabhängiges Ereignis durchschnittlich unter 7 Fällen einmal mit einem Mondwechsel zusammenfalle. Ähnliche Beispiele lassen sich in großer Menge bilden; jeder naturwissenschaftliche Aberglaube bietet dazu Gelegenheit. Und sollten derartige Erörterungen nicht einen nützlichen Einfluß auf den Erwerb der Befähigung zu richtigem Denken ausüben?

Auch daß der Schüler einen gewissen Grad von Einsicht in die Grundlage des heute so allgemein wichtigen Versicherungswesens aus der Schule ins Leben mitnehme, daß er befähigt sei, den Zweck und Wert statistischer Ermittelungen, z. B. der Volkszählungen, zu verstehen, daß er eine Vorstellung davon bekomme, wie der praktische Mathematiker durch wiederholte Messungen und überschüssige Daten den wahrscheinlichen Fehler seines Resultats und eine Verbesserung des letzteren zu ermitteln vermag (ohne daß deshalb Ausgleichungsrechnung gelehrt werden soll), alles dies dürfte seiner allgemeinen Bildung vorteilhaft sein. Selbst die Anwendung auf Wetten und Glücksspiele ist nach dieser Richtung nicht gänzlich zu verachten. Die Hazardspiele sind durch die Beseitigung der öffentlichen Spielbanken nicht aus der Welt geschafft, und die Jugend erliegt leicht der Verführung. Es kann nur zum Schutze derselben beitragen, wenn sie gelernt hat, im einzelnen Falle die Ungerechtigkeit eines Spieles rechnungsmäßig nachzuweisen und sich zu überzeugen, daß sie übervorteilt wird. Natürlich soll die Schule keine Hazardspiele erläutern; es giebt der unverfänglichen Beispiele genug, um das Prinzip und seine Anwendung zu erklären. Die Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsrechnung an sich wird auch so leicht keinen Menschen davon abhalten, hier und da an einem Spiele teilzunehmen, aber sie kann doch in etwas dazu beitragen, den Einzelnen vor einem Wettkampfe mit allzu ungleichen Mitteln und vor sonstigen groben Thorheiten zu schützen.

Man braucht nicht sehr viele Zeit, um die Anfänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung, soweit sie auf der Schule zu behandeln sind, zu lehren; die Rechnungen sind einfach, die Begriffe leicht klar zu machen. Nur die Bestimmung der Anzahlen der Fälle bei der Auflösung spezieller Aufgaben von zusammengesetzter Art kann Schwierigkeiten bereiten und

den Schüler zu manchen Irrtümern veranlassen. Die Gelegenheit zu eigenartigen Verstandesübungen ist also auch hier geboten.

§ 39. Der binomische Lehrsatz.

Der binomische Lehrsatz bildet den passendsten Schluß des arithmetischen Pensums der Prima auf den Gymnasien. Derselbe ist zunächst notwendig, damit die wissenschaftliche Lücke ausgefüllt werde, welche in der Potenzlehre bei der Aufgabe, die Potenz einer Summe oder Differenz zu entwickeln, gelassen werden mußte. Sodann bietet er eine Gelegenheit, den am Ziele ihrer Schule anlangenden Schülern einen Ausblick auf sich öffnende neue Gebiete zu gewähren, welcher ihnen zeigt, daß sie zwar einen gewissen Abschluß, aber nicht das Ende der Wissenschaft erreicht haben. Wie dies geschehen kann, soll im nachstehenden angedeutet werden.

Unter den verschiedenen Methoden, den binomischen Lehrsatz abzuleiten, empfiehlt sich der Einfachheit der angewendeten Mittel wegen und aus anderen Gründen diejenige, welche mit der Entwickelung eines Produkts von der Form $(x+a)(x+b)(x+c)\ldots$ beginnt. Hier erläutert sich zunächst an einem Beispiel der Begriff der induktiven Methode, indem aus einer Reihe durch Ausführung der Multiplikationen gewonnener Resultate das allgemeine Gesetz abstrahiert wird, wobei auch die vorher kennen gelernte Kombinationslehre eine Anwendung findet, die später zu der Aufstellung der Binomialkoefficienten führt. Der strenge Beweis der allgemeinen Richtigkeit übt dann den Schluß von n auf $n+1$. Die Entwickelung des Produkts $(x-a)(x-b)\ldots$ ergiebt sich darauf leicht und bietet die erste Gelegenheit zu einem Ausblick durch einen (kurzen) Hinweis auf die Theorie der höheren algebraischen Gleichungen. Der binomische Lehrsatz erscheint nun als ein spezieller Fall der vorstehenden Entwickelungen. Daß durch dieselben seine Giltigkeit auf ganze positive Exponenten eingeschränkt ist, muß ausdrücklich hervorgehoben werden. Damit wird aber auch die Frage angeregt, ob dieselbe etwa auch für andere Fälle bestehe und nachgewiesen werden könne. Das erstere kann in historischer Form bejaht werden, die Ausführung des Beweises geht bereits über das Ziel des Gymnasialunterrichts hinaus. Dies hindert jedoch nicht, zu untersuchen, wie sich z. B. die Entwickelung von $\sqrt{a+b}=(a+b)^{\frac{1}{2}}$ gestalten würde, wenn der Nachweis der Giltigkeit des binomischen Lehrsatzes für diesen Fall erbracht wäre, und namentlich welche Unterschiede diese Entwickelung von derjenigen bei ganzen positiven Exponenten zeigt. So gelangt man zu dem letzten Ausblick auf die Entwickelung durch unendliche Reihen und die Berechnung von Größen mittels derselben, sofern und insoweit ihre Konvergenz nachweisbar ist.

Für weitergehende Schulen bildet die Ausführung des hier Angedeuteten die Brücke zu einem neuen Abschnitt. Die Moivresche

Binomialformel, die Entwickelung der Exponentialgrößen, die logarithmischen und trigonometrischen Reihen und was dazu gehört bilden den hauptsächlichen Inhalt desselben. Über die methodische Behandlung desselben hat der Verf. nur geringe Erfahrungen, auch wird es nicht nötig sein, darüber viel zu sagen. Die wissenschaftliche Behandlung, wie sie in mustergiltigen Darstellungen vielfach vorliegt, wird in Verbindung mit der didaktischen Kunst des an dieser Stelle meist schon erfahrenen Lehrers zum richtigen Ziele führen. Mit dem letzteren tritt der Schüler an die Schwelle der Differential- und Integralrechnung, welche nach unserer schon früher ausgesprochenen Ansicht unter den gegenwärtigen Verhältnissen dem Fachstudium auf den Hochschulen zuzuweisen ist.

---

5. Kapitel.

Planimetrie.

a) Der propädeutische Unterricht.

§ 40.

Daß die Ansichten über den Nutzen eines propädeutischen Unterrichts in der Geometrie sehr verschieden sind, ist schon in der Einleitung (S. 5) erwähnt worden. Untersucht man die Gründe, welche auf beiden Seiten ins Feld geführt werden, so erkennt man, daß die Verfechter derselben meist von abweichenden Vorstellungen und Begriffen über die Art dieses Unterrichts ausgehen, und vergleicht man die verschiedenen Schriften, welche als Anleitung oder Hilfsmittel für denselben herausgegeben sind, so ergeben sich in der That höchst verschiedene Behandlungsweisen.

Um die Frage zu klären, ist es daher vor allem nötig, zu untersuchen, welchen besonderen Zwecken der gedachte Unterricht zu dienen hat, und in welcher Weise derselbe dementsprechend zu behandeln ist. Hiernach kann dann entschieden werden, ob jene Zwecke nutzbringend oder gar unentbehrlich sind, und vor welchen Fehlern in der Behandlungsweise zu warnen ist.

Der propädeutische Unterricht hat unbestritten als seine Hauptaufgabe diejenige anzusehen, daß er die Schwierigkeiten beseitigen soll, welche der Eintritt in den wissenschaftlichen Unterricht den Anfängern bietet, und welche mindestens bei einzelnen Schülern eine Verzögerung der Fortschritte oder ein gänzliches Zurückbleiben zur Folge haben, möglicherweise die ganze Zukunft derselben in betreff ihrer mathematischen Leistungen beeinflussen können, und jedenfalls sehr vielen Schülern den Anfang erschweren. Sind in der Geometrie Schwierig-

keiten von solcher Bedeutung vorhanden, und ist ein propädeutischer Unterricht imstande, dieselben zu heben, so muß die Frage nach seiner Einführung bejaht werden.

Worin sollen nun diese Schwierigkeiten bestehen? Hören wir, was einer der namhaftesten Verfechter eines vorbereitenden Kursus darüber sagt: *)

„Der Schüler, welcher in eine neue Disciplin eingeführt werden soll, bringt immer schon einen gewissen Vorrat von Kenntnissen mit, die in irgend welcher, wenn auch lockern Beziehung zu der neuen Disciplin stehen. Aus diesem Vorrate das Brauchbare auszusuchen und ans Licht zu ziehen und daraus einen Boden zu bereiten, auf welchem man nach und nach zu neuen Gegenständen hingelangen kann, immer Sorge tragend, daß unter den neu erworbenen Kenntnissen die engste Verknüpfung, sowohl mit einander als mit dem früher vorhandenen Wissen sich herstelle: das ist der Weg, welchen die Psychologie dem Lehrer vorschreibt, der des Erfolgs gewiß sein will. Denn solcher Unterrichtsweise folgen die Schüler mit Lust, und das Interesse fehlt immer nur da, wo die Schüler mit unbekannten und unvorbereiteten Dingen plötzlich überschüttet werden, sodaß ein mangelndes Interesse stets als der sicherste Beweis davon anzusehen ist, daß von seiten des Lehrers ein Fehler begangen war. Dieser Fehler aber ist leicht zu erkennen und nachzuweisen, wenn man von dem Gesagten speziell die Anwendung auf Mathematik macht. Was bei dem eintretenden Schüler Brauchbares für den mathematischen Unterricht vorgefunden wird, das beschränkt sich in der Regel nur auf mehr oder weniger rohe Begriffe von geraden und krummen Linien, von Figuren, die aus Linien zusammengesetzt sind und, wenn es hochkommt, von Körperräumen (für die Geometrie). — Die Mathematik selbst aber bedarf scharf bestimmter Begriffe, ja sie operiert sofort mit diesen Begriffen, konstruiert neue, u. s. f., sodaß der Schüler, wenn nicht der Unterricht ermüdend langsam fortschreiten soll, sehr bald den Faden verlieren wird, weil ihm nicht Zeit gegeben ist, sich die Begriffe, bevor es zu deren Anwendung geht, geläufig zu machen. Dazu kommt, daß die Mathematik schon in ihren ersten Anfängen es mit sehr abstrakten Begriffen zu thun hat, während die Begriffe, welche der Schüler mitbringt, wenig mehr als Individualvorstellungen sind, mithin ein Unterricht, welcher ihm die Mathematik selbst bringt, in der Sphäre jener Begriffe unfehlbar nicht einmal von ihm verstanden werden wird. Nur die wenigen, welche besser vorbereitet sind, werden dem Unterricht zu folgen vermögen, und eben diese sind es, denen man sonst die sogenannte „Anlage“ für Mathematik beilegte. Dies alles aber führt zu dem Resultate, daß mit Schülern, sowie sie in der Regel die Schule bietet, niemals un-

*) Wittstein, Die Methode des mathematischen Unterrichts. Hannover 1879, Hahn. S. 80 ff.

mittelbar der eigentliche mathematische Unterricht begonnen werden darf, sondern daß im Gegenteil hierzu erst ein vorbereitender Unterricht erforderlich wird, eine Brücke, welche von dem Vorstellungskreise des Schülers zu der Wissenschaft hinüberführt."

Man wird diesen Ausführungen im wesentlichen zustimmen müssen, zugleich aber auch dieselben für noch nicht erschöpfend erklären. Denn nicht bloß die Schwierigkeiten der Bildung abstrakter und mit keinem hinreichenden früheren Vorstellungskreise verbundener Begriffe und des Operierens mit solchen, nicht bloß daß man (wie Herbart so kurz und treffend sagt) demonstrieren will, wo noch keine mathematische Phantasie geweckt worden ist, ist den Erfolgen des geometrischen Anfangsunterrichts hinderlich, sondern auch die Art dieses Demonstrierens selbst. In einem Alter, in welchem das Kind fast nur in der Anschauung lebt und das ihm anschaulich Gebotene ohne weiteres als giltig anzunehmen gewohnt ist, soll es rein logische Schlußfolgerungen verstehen und ziehen lernen, die in ihrer abstrakten Manier seinem Geiste noch fast völlig fremd sind. Das Wesen eines Beweises ist ihm meist noch gänzlich verschlossen, die Notwendigkeit eines solchen begreift es nicht, wo ihm Gefühl und Anschauung die Richtigkeit des Satzes unmittelbar, also auf viel kürzerem Wege einleuchten lassen. Daher ist es auch stets bestrebt, diese Anschauung an die Stelle der logischen Gründe zu setzen, es versagt die ungewohnte geistige Arbeit, indem es nur die sprachliche Form der Schlußfolgerung wählt, um scheinbar mittels derselben zu einem schon vorher erreichten Ziele zu gelangen. Der nicht vorbereitete Quartaner wird beispielsweise stets bereit sein, wenn ihm ein gleichseitiges Dreieck vorgezeichnet worden, ohne weiteres zu folgern: da die Seiten des Dreiecks einander gleich sind, so müssen auch die Winkel gleich sein, weil ihm dies aus der Anschauung klar zu sein scheint, oder auch weil er das unbestimmte Gefühl hat, daß im gleichseitigen Dreieck kein Grund vorhanden, warum der eine Winkel größer sein solle, als der andere. Er wird auch beispielsweise bereit sein, Eigenschaften, die für ein Parallelogramm richtig sind, unbedenklich für alle Vierecke in Anspruch zu nehmen, wenn das ihm vorliegende Viereck zufällig ein Parallelogramm ist. Daher die außerordentliche Mühe, die der Lehrer bei vielen solcher nicht vorbereiteten Quartaner, und manchesmal wohl vergeblich aufzuwenden hat, um dieselben zum Verständnis der Gedankenentwickelung eines Beweises zu bringen, und die oft ganz zusammenhangslosen Sätze, die ein solcher Schüler bei der Wiederholung ganz unbefangen durch ein folglich oder also verbindet. Auch nach dieser Seite ist also eine Brücke zwischen der Erkenntnis durch Anschauung und derjenigen durch logische Schlußfolgerung zu suchen.

Daß und wie eine solche durch einen vorbereitenden Kursus geboten werden kann, mögen einige Beispiele zeigen:

Die Begriffe des Dreiecks und der verschiedenen Arten desselben seien durch Zeichnungen und Erklärungen erläutert, und es seien die

Schüler geübt worden, beispielsweise ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen. Läßt man nun über jeder Seite eines solchen ein neues, gleichgroßes gleichseitiges Dreieck zeichnen, so entdeckt der Schüler gleichsam, daß je zwei Seiten dieser neuen Dreiecke ohne sein Zuthun in eine Gerade fallen, und daß die Gesamtfigur mithin ebenfalls ein gleichseitiges Dreieck bildet. Die Seiten des letzteren sind doppelt so groß, als die des ersten, an Inhalt aber enthält es dieses viermal. Diese Eigenschaften sollen selbstverständlich mit Hilfe von Fragen des Lehrers, durch eine Art Beschreibung der Figur gefunden werden. Läßt man dann das gewonnene Netz eines Tetraeders ausschneiden und zu letzterem zusammenfalten, so kann man auch an diesem Eigenschaften auffinden, welche als Folge der Gleichheit der Seiten erscheinen. Vielleicht schließt auch das Netz des einen oder andern Schülers nicht ordentlich, und derselbe findet selbst den Zusammenhang mit der nicht genügend richtigen Anfertigung der Figur.

Ein andermal sind zwei parallele Gerade gezeichnet worden. Man läßt denselben gleiche Längen geben, und die entsprechenden Endpunkte mit einander verbinden: die verbindenden Strecken werden von selbst einander parallel. Ist dies Zufall oder muß es so sein? Wiederholungen der Zeichnungen führen zu dem Schluß: es ist jedesmal so, und nun tritt fast von selbst die Frage nach dem „Warum?" und der Wunsch auf, dieselbe beantwortet zu sehen.

In diesen Beispielen ist zugleich als wichtiges Hilfsmittel für den Bau der gewünschten „Brücke" das Zeichnen von Figuren durch die Hand der Schüler benutzt worden. Dies erinnert uns an zwei schon früher erwähnte Nebenaufgaben des vorbereitenden Kursus, nämlich die Übung der Schüler im Gebrauche von Zirkel und Lineal, wie auch anderer Hilfsmittel (rechtwinklig-dreieckiges Lineal, Transporteur und Maßstab) zum thunlichst sauberen und genauen Zeichnen von Figuren, sowie die Übung des Augenmaßes. Diese mehr mechanischen Übungen eignen sich besonders für jüngere Schüler, während der systematisch-wissenschaftliche Unterricht für dieselben nicht rechte Zeit hat, will er anders den gleichmäßigen Fortschritt auf seinem Gebiete nicht zu sehr verzögern und unterbrechen. Die gedachten Vorübungen liefern ihm daher ein, wenn nicht notwendiges, so doch recht nützliches und wünschenswertes Hilfsmittel.

Man wird dem Gesagten vielleicht als eine Erfahrungsthatsache gegenüberhalten, daß doch vielfach auch ohne einen solchen Vorbereitungskursus recht zufriedenstellende Resultate im mathematischen Unterricht erreicht worden seien, daß also ein solcher durchaus nicht als unentbehrlich bezeichnet werden dürfe. Gewiß, man kann auch ohne ihn auskommen, man wird jedoch in diesem Falle nur dadurch hinreichende Erfolge erzielen, daß man im Anfangsunterricht beständig die Propädeutik mit der wissenschaftlichen Unterweisung vermischt, und die Fortschritte werden gleichwohl langsamer, weniger sicher und weniger all-

gemein sein. Aus dem Mangel des propädeutischen Kursus erklärt es sich, daß so manche Lehrer den Anfang des wissenschaftlich-geometrischen Unterrichts in Quarta für verfrüht halten, während doch die Erfahrungen anderer dafür sprechen, daß ein elf- bis zwölfjähriger Knabe vollauf die Befähigung besitze, z. B. die Sätze von der Kongruenz der Dreiecke zu verstehen. Es erklärt sich ferner, warum manche in der Quarta den heuristischen Unterricht verschmähen und glauben, daß hier durch die dogmatische Methode erst ein Untergrund für die Anwendung der Heuristik geschaffen werden müsse. Es ist eben das Bedürfnis, erst jene „Brücke" herzustellen, welches sich überall aufdrängt, und dessen Befriedigung bald durch ein reiferes Alter der Schüler, bald durch eine Gewöhnung an die mathematische Darstellungsweise erhofft wird. Es ist gewiß, daß ein solches reiferes Alter infolge der durch anderweite geistige Übungen erworbenen Befähigung zu mehr abstraktem Denken den Eingang zur Mathematik erleichtern kann, allein geziemt es unserem Unterricht, das was ihm zu leisten zukommt, sich von anderer Seite darbieten zu lassen, und wird nicht oft genug auch der ohne besondere Vorschulung an die Mathematik herantretende Tertianer noch den Schwierigkeiten des Quartaners unterliegen? Ist ferner ein dogmatischer Unterricht in Quarta, bei dem der Schüler vielleicht allmählich aus sich selbst heraus merkt, worauf es ankommt, ein Gewinn für die Zukunft im Gegensatz zu einer ordentlichen Unterweisung desselben durch den Lehrer, wie sie im propädeutischen Unterricht stattfinden soll? Ist der Verlust an Zeit durch den Ausfall eines mehr oder minder großen Teils eines Jahreskursus für den mathematischen Unterricht unserer höheren Schulen gleichgiltig?

Die Pädagogik ist eine Wissenschaft, die — wenigstens bis heute — noch nicht in der Lage ist, völlig a priori konstruiert werden zu können; sie bedarf der Kontrole durch die Erfahrung. Auch in der vorliegenden Frage ist es darum nicht ohne Bedeutung, daß zahlreiche Lehrer, welche sich in den propädeutischen Unterricht hineingearbeitet und die Früchte desselben beobachtet haben, die Erklärung abgeben, daß sie denselben nicht wieder entbehren möchten. Dem Verfasser des vorliegenden Buches mag es gestattet sein, auch seiner eigenen Erfahrung zu gedenken. Derselbe war in der Lage, einige Jahre hindurch mathematischen Unterricht an Zöglinge zu erteilen, welche einen sehr ausgedehnten, durch Männer wie Finger*) und Fresenius**) organisierten und in deren Sinne erteilten propädeutischen Unterricht genossen hatten. Obgleich unter vielfach schwierigen Verhältnissen gearbeitet werden mußte, waren die Erfolge in betreff eines gleichmäßigen

*) Verfasser der weithin rühmlichst bekannten Anleitung zur Heimatkunde an dem Beispiele von Weinheim.

**) Verfasser von „Die psychologischen Grundlagen der Raumwissenschaft, Wiesbaden" und „Die Raumlehre, eine Grammatik der Natur. Frankfurt a. M. Winter."

Fortschritts der verschiedenen Schüler doch vergleichsweise erheblich günstiger, als diejenigen, welche später an einer anderen Anstalt erzielt werden konnten, deren Schüler keine solche Vorbildung genossen hatten. Die hier gemachten Erfahrungen führten anfangs zur Aufgabe der früher gehegten Überzeugung, daß es keinen Schüler gebe, der nicht imstande sei, die Elementarmathematik zu begreifen, und erst später hat der Verf. eingesehen, daß an den wenig begabten Schülern, die er für zu dumm zum Erlernen der Mathematik gehalten, gesündigt worden sei, weil man ihnen eine Leistung zumutete, zu der sie freilich nicht befähigt erschienen, für welche aber die Befähigung auch in ihnen hätte bis zu einem gewissen Grade geweckt werden können. Was so in den Anfangsgründen versäumt worden, läßt sich in den höheren Klassen nur schwer oder gar nicht wieder gut machen; es ist gewiß, daß manche Schüler durch schlechten oder in falscher Richtung erteilten Anfangsunterricht für ihre ganze Schulzeit für die Mathematik verdorben werden können.

§ 41.

Aus dem Gesagten ergiebt sich, daß der propädeutisch-geometrische Unterricht von der Anschauung auszugehen, mittels derselben die im Anfange des wissenschaftlichen Systems vorkommenden abstrakten Begriffe zu erläutern und einzuüben, endlich durch praktisches Operieren mit denselben auf die Wahrnehmung des gesetzlichen Zusammenhanges zwischen den Eigenschaften der behandelten Raumgebilde hinzuwirken und so allmählich auf die Einsicht in die Notwendigkeit einer Begründung dieses Zusammenhanges und das Wesen eines Beweises vorzubereiten hat. Als Hilfsmittel hierzu dient namentlich das Zeichnen von Figuren mit Zirkel und Lineal und die Beschreibung der Eigenschaften derselben.

In diesem Sinne hat sich auch die mathem.-naturw. Sektion der 33. Philologenversammlung in Gera ausgesprochen, indem sie die These annahm: In der Geometrie ist ein besonderer propädeutischer Unterricht nötig, welcher jedoch dem Inhalte des systematischen Lehrganges nicht vorgreifen darf. Ebenso forderte dieselbe Sektion auf der Leipziger Versammlung 1872, daß dem Unterricht in der Geometrie ein propädeutischer Unterricht vorausgehe, welcher die Anschauung mittels des Zeichnens übe.

Dem vorstehenden Plane würde es am besten entsprechen, wenn der Unterricht mit der Anschauung von Körpern begonnen würde, welche in Modellen von hinreichender Größe vorgeführt und auf das genaueste beschrieben werden müßten. An diese Beschreibung des Sichtbaren, also der Flächen, Ecken und Kanten, würden sich die ersten Zeichenversuche, selbstverständlich nicht von Abbildungen der Körper, sondern von Umrißfiguren derselben anschließen, so z. B. an den Würfel die Zeichnung eines Quadrats, zuerst vielleicht nur durch Um-

fahren des auf ein Papierblatt gestellten Modells mit dem Bleistift, dann mittels Lineals, Winkelhakens und Zirkels. Diese Zeichnungen würden also erst erfolgen, nachdem die Anschauung der Figur und die Erkenntnis ihrer Eigenschaften durch Beschreibung am Körpermodell vorausgegangen wäre. Dieses Verfahren, an einer größeren Reihe verschiedenartiger Körper ausgeführt, könnte etwa auf die Dauer eines Jahres ausgedehnt werden und würde sich schon für die jüngsten Schüler, also für die Sextaner, ja zum Teil wohl schon für die Vorschul- oder Elementarklassen eignen. In einem zweiten Jahre, in Quinta, mit ein bis zwei wöchentlichen Stunden, könnten sich dann die speziell planimetrischen Vorübungen anschließen. Zu einer so ausgedehnten Betreibung der Formenlehre wird jedoch auf den höheren Lehranstalten nicht die Zeit geboten; es muß hier mit den thatsächlichen Verhältnissen gerechnet werden. Diese sind gegenwärtig immerhin günstiger, als in früheren Zeiten, in welchen für die Propädeutik gar kein Platz vorhanden war, wenn nicht der einzelne Lehrer die geometrische Stunde in Quarta dafür hergab. Durch die neueren Pläne ist eine wöchentliche Stunde während des Jahreskursus der Quinta für geometrische Propädeutik frei gegeben, und diese muß also in geeigneter Weise ausgenutzt werden.

Die Übungen an Körpermodellen sind bei der hiernach gebotenen Beschränkung nur in den ersten Stunden und an den einfachsten Formen vorzunehmen. Sobald die Fundamentalbegriffe der Fläche, Linie und des Punktes, des Winkels und der geradlinigen Figur von denselben abstrahiert sind, wird man sich auf ebene Zeichnungen beschränken, die der besonderen Vorbereitung auf die Beschäftigung mit der Planimetrie dienen. Es ist hierbei falsch, eine lange Zeit auf das Ziehen gerader Linien zu verwenden, indem man die verschiedensten Lagen und Längen, punktiert, gestrichelt und punktiert-gestrichelt bis zum Überdruß zeichnen läßt, und etwa systematisch eine längere Reihe von Aufgaben behandelt, wie eine gerade Linie beliebig, dann eine solche durch einen gegebenen Punkt, ferner von einem gegebenen Anfangspunkte aus, zwischen zwei gegebenen Punkten zu ziehen, eine Strecke von beliebiger, dann von gegebener Länge mittels des Maßstabes, weiter eine solche, welche einer gegebenen Strecke gleich ist, zu zeichnen, eine gegebene Strecke auf einer anderen Geraden abzutragen, eine solche durch direktes Anlegen des Maßstabes, sowie mittels Zirkel und Maßstab zu messen, u. dgl. m. Alles dies soll ja der Schüler lernen und üben, aber der Quintaner kann es schon zum Teil oder er lernt es ohne Mühe gelegentlich. Die systematische, schrittweise Durchnahme ermüdet ihn, regt ihn wenigstens nicht lebhaft an, er verlangt Figuren zu sehen, an denen er ein Interesse nehmen kann, und die ihm als eine fertig gewordene Leistung seiner Hand erscheinen.

Man führe ihn also sogleich mitten in das Figurenzeichnen, beginne z. B. mit der Zeichnung eines gleichseitigen Dreiecks. Die dazu

nötige Strecke zeichnen, sie in den Zirkel nehmen, Kreisbogen mit dem so bestimmten Radius konstruieren, den Durchschnittspunkt mit den beiden anderen verbinden, das sind alles im einzelnen Übungen der vorgedachten Art, die er also auch so durchmacht und im weiteren Verlaufe des Unterrichts oft genug bis zur Fertigkeit wiederholen wird. Er sieht aber auch gleichzeitig, daß er mit dem so Gelernten etwas anfangen kann, dasselbe macht ihm Freude, und jene Übungen sind ja außerdem einfach genug, um ohne besondere Vorbereitung bald genau genug ausgeführt zu werden. Wer zu schlecht gezeichnet hat, muß freilich die Zeichnung noch ein- oder mehrere male machen, bis sie genügt. Auch die anderen wiederholen dieselbe, aber diese Wiederholung sei zugleich mit einem Fortschritt, einer Weiterbildung der Figur, z. B. durch die oben erwähnte Zeichnung des Netzes eines regelmäßigen Tetraeders, verbunden. Auch das Abtragen von Strecken oder Winkeln nach bestimmten Maßen und die Schätzung der Größen von solchen zur Übung des Augenmaßes, die durchaus nicht zu vernachlässigen sind, können hier und anderweit unter der Hand gelernt werden und zu der den kleinen Schülern so erwünschten Abwechselung beitragen. So kann man, nachdem das Dreieck zuerst in beliebiger Größe gezeichnet ist, ein zweites verlangen, für welches eine vorgeschriebene Seitenlänge auf einem einfachen Centimetermaßstabe abzunehmen ist; wie letzteres gemacht wird, braucht den meisten Schülern gar nicht erst gezeigt zu werden, und es ist nur darauf zu achten, daß es mit Sorgfalt und Genauigkeit geschieht. Dann kann verlangt werden, zur Vergleichung die Länge der Seite des zuerst gezeichneten Dreiecks abzuschätzen, und zum Schluß muß diese Abschätzung durch die genaue Abmessung mittels des Maßstabes kontroliert werden.

An hinreichendem Material den Unterricht in dieser Weise fortzusetzen, fehlt es nicht; man wird vielmehr die etwa 40 Stunden, welche zu Gebote stehen, knapp genug bemessen finden, um alle die verschiedenen Figuren der Planimetrie, welche kennen gelernt werden sollen, und die an ihnen vorzunehmenden Übungen von Auge, Hand und Verständnis zu erschöpfen.

Ein Lehrbuch, welches den propädeutischen Unterricht in solcher Weise für das Bedürfnis höherer Schulen bearbeitet hätte, ist dem Verfasser zur Zeit noch nicht bekannt. Ein erfahrener, gewandter Lehrer bedarf für sich eines solchen nicht, und die Schüler sollen auf dieser Stufe nicht aus einem Buche lernen. Gleichwohl ist die Abfassung eines solchen wünschenswert zur Anleitung für den Anfänger und zur Richtschnur für den Elementarlehrer, der gewöhnlich den Rechenunterricht in Quinta und den damit verbundenen geometrisch-propädeutischen zu erteilen hat, sowie endlich um für die Schüler Musterbilder ihrer Zeichnungen und eine kurze Zusammenstellung der Aufgaben zu geben.

Die dem Verfasser bekannten Schriften, welche den Zweck ver-

folgen, dem vorbereitenden geometrischen Unterricht zu Grunde gelegt zu werden, behandeln denselben nach verschiedenen anderen Richtungen. Wir heben folgende hervor:

Das umfangreichste Buch dieser Art ist „J. C. V. Hoffmann, Vorschule der Geometrie. Halle, 1874—81, L. Nebert". Dasselbe bietet auf 241 Oktavseiten einen vollständigen Lehrgang der Planimetrie mit sozusagen popularisierten Ableitungen und Beweisen, bei welchen namentlich Verschiebung und Drehung von Figurenteilen, Zeichnungen mit bestimmten Maßzahlen der einzelnen Strecken und Winkel sowie Veranschaulichung an besonderen Fällen mit allmählichem Fortschritt zum allgemeinen benutzt werden. Das sehr fleißig gearbeitete Buch besitzt im einzelnen manche Vorzüge, unter denen wir die fortwährende Inanspruchnahme der Selbstthätigkeit des Lernenden und die auf Korrektheit des sprachlichen Ausdrucks verwendete Sorgfalt hervorheben, und es wird vielleicht für gute Fortbildungsschulen, gehobene Elementarklassen, und auch für Lehrerseminare und angehende Volksschullehrer recht nützliche Dienste leisten; seine Bestimmung für die „unteren Klassen" der Gymnasien und Realschulen aber scheint uns auf einer Verkennung der Aufgabe und der Stellung der geometrischen Anschauungslehre an diesen Anstalten zu beruhen. Schon sein äußerer Umfang macht dasselbe unter den bestehenden Verhältnissen ungeeignet zum Gebrauche; um dasselbe, einschließlich der praktischen Ausführungen der „Übungen" im Messen und Konstruieren, durchzuarbeiten, würden mindestens drei bis vier Jahre mit zwei wöchentlichen Unterrichtsstunden nötig sein. Sodann geht das Verständnis des Inhalts der mittleren und späteren Teile des Buches trotz der möglichsten Fernhaltung abstrakter Darstellungsweise doch vielfach weit über das hinaus, was man einem Quintaner und selbst einem Quartaner im Durchschnitt zumuten darf. Der wichtigste Einwand aber ist, daß die Aufgabe der geometrischen Anschauungslehre an den genannten Anstalten gar nicht die Durchnahme des später wissenschaftlich zu lehrenden Inhalts der Planimetrie in anschaulicher Form ist. Es ist falsch, die Lehrsätze derselben als solche aufzustellen, in systematischer Reihenfolge zu ordnen und ihre Richtigkeit, wenn auch noch so populär, nachzuweisen, wo es gilt, die früher beschriebenen Aufgaben der Propädeutik zu lösen.*) Ein solches Verfahren mag, auch anderwärts geübt, der letzteren einen Teil ihrer Gegner verschafft haben, welche der Ansicht sind, daß eine solche Vorschule durch die Vorwegnahme der Ergebnisse des später wissenschaftlich zu Lehrenden das Interesse der Schüler für den eigentlichen planimetrischen Unterricht abstumpfe und auf diese Weise schädlich wirke. Durch diese Abweisung des Hoffmannschen Buches für den hier ins Auge gefaßten Zweck soll jedoch nicht geleugnet werden, daß dasselbe für den Lehrer der

---

*) Man vergleiche die These der Geraer Philologenversammlung, S. 168.

Propädeutik in einzelnen Bemerkungen und Ausführungen manches anregende bieten könne.

In ganz verschiedener Weise behandelt die in demselben Verlage erschienene „Vorschule der Geometrie von H. Köstler, zweite Auflage 1882" den Gegenstand. Dieselbe umfaßt nur 24 Seiten und ist ausschließlich für den Gebrauch der Schüler bestimmt. Daher giebt sie nur die bleibenden Resultate für das Wissen, keine Ausführung des Unterrichtsverfahrens im einzelnen, also auch keine Anleitung für den Lehrer. Sie besteht aus zwei Teilen. Der erste, die Formenlehre, enthält nacheinander die Begriffe der verschiedenen geometrischen Gebilde und ihrer besonderen Arten. Er ist im wesentlichen eine durch Figuren erläuterte Zusammenstellung von in der Planimetrie vorkommenden Definitionen. Der Verf. will dieselben im Unterricht keineswegs, wie in seinem Buche dogmatisch aufgestellt, sondern durch die eigene Thätigkeit der Schüler gewonnen sehen. Eine nähere Angabe, in welcher Weise sich diese Thätigkeit entfalten kann, ist nicht gemacht, und nur angedeutet, daß von der sinnlichen Anschauung allmählich zur Abstraktion der begrifflichen Erklärung emporgestiegen werden solle. — Der zweite Teil, die Konstruktionslehre, enthält die sogenannten Elementarkonstruktionen der Planimetrie, z. B. die Halbierung einer Strecke oder eines Winkels, in der systematischen Form, doch ohne Beweise. An ihnen soll der Schüler die Handhabung von Zirkel und Lineal einüben, und der Verfasser bezeichnet es als zweckmäßig, daß die am Schlusse des Heftes beigefügten „Übungsaufgaben" auf bestimmte Maße — wieviel Decimeter an der Tafel, soviel Centimeter im Buche — übertragen werden.

Man sieht, daß dieser Lehrgang ebenfalls nicht das im obigen gesteckte Ziel vollständig erreicht. Insbesondere scheint die eine Seite des letzteren, die allmähliche Heranleitung zur Erkenntnis der gesetzmäßigen Beziehungen zwischen den Eigenschaften der Figuren, nicht genügend herangezogen. Auch die Trennung der Übungen in der Begriffsbildung von denjenigen im Zeichnen dürfte nicht zu billigen sein. Doch wird zugegeben werden müssen, daß auch Lehrgänge, wie der vorliegende, nicht ohne Nutzen sind, und es mag in der Praxis vielfach in dieser oder ähnlicher Weise verfahren werden.

Ein drittes Beispiel abweichender Behandlungsart liefert „E. zur Nieden, Methodisch geordnete Aufgabensammlung für den geometrisch-propädeutischen Unterricht in der Quinta höherer Lehranstalten. Zweite Auflage, Bonn 1885, E. Strauß". Das Buch ist, wie der Titel zeigt, ganz speziell für den uns vorliegenden Zweck verfaßt, und dasselbe scheint auch zahlreiche Freunde gefunden zu haben, denn die zweite Auflage erschien schon ein Jahr nach der ersten. Es enthält in einer Einleitung auf etwa 3 Seiten 37 Fragen über die Fundamentalbegriffe und bietet dann auf den übrigen 50 Seiten 377 Aufgaben, von denen viele mehrfache sind. Dieselben verlangen sämtlich

die Zeichnung ebener Figuren in bestimmten Maßen, ohne Anwendung geometrischer Lehrsätze. Es ist nicht nötig, auf Einzelheiten des Buches näher einzugehen; das Gesagte wird hinreichen, um erkennen zu lassen, daß auch hier die oben gestellte Aufgabe des propädeutischen Unterrichts nicht allseitig behandelt ist. Daß der Gebrauch des mit vieler Sorgfalt bearbeiteten Schriftchens nach der von ihm vertretenen Seite Nutzen stiften kann, soll nicht bezweifelt werden.

Noch andere Autoren gehen von praktisch-geometrischen Übungen im Freien aus, so „Börner, Lehrbuch zur Einführung in die Geometrie für höhere Schulen. Leipzig, Teubner" und „Falke, Propädeutik der Geometrie, gegründet auf praktische Aufgaben aus der Geodäsie. Leipzig, Quandt und Händel". Solche Übungen können sehr anregend sein und vielen Nutzen bringen; bei sehr gefüllten Klassen dürfte jedoch die gleichzeitige rege Heranziehung aller Schüler manchem Lehrer Schwierigkeiten bieten; namentlich aber werden sie viel Zeit verlangen, zumal wenn nicht ein geeigneter Platz in unmittelbarer Nähe bei der Schule zu Gebote steht. Wir unterlassen der Kürze halber eine nähere Charakterisierung der beiden, in der Ausführung von einander abweichenden Lehrgänge und verweisen den sich dafür Interessierenden auf die genannten Schriften selbst. Eine Besprechung des Lehrbuchs von Börner findet man in der Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht XI, S. 51.

Erwähnt mögen auch noch folgende Schriften werden: Féaux, Rechenbuch und geometrische Anschauungslehre, besorgt von Luke. Paderborn, Schöningh, ferner Harms, die erste Stufe des mathematischen Unterrichts; zweite Abteilung: Geometrische Aufgaben. Oldenburg, Stalling, und Reishaus, Vorschule zur Geometrie. Leipzig, Teubner. (Die letzte ist besprochen in d. Zeitschr. f. math. und naturw. Unterricht XI, S. 448.)

Es wird nicht nötig sein, außer den vorstehend genannten Schriften noch weitere anzuführen. Man findet noch Lehrgänge, welche fast nur die technische Fertigkeit im Zeichnen üben, und wieder andere, welche ihr Ziel nur in der Pflege besonderer Liebhabereien, wie des Konstruierens von Figuren mittels Abscissen und Ordinaten suchen. Der Verfasser des vorliegenden Buches hat in seiner eigenen Schulzeit auf diese letztere Weise sogar die mit kurzen geradlinigen Strichen nachgeahmten Gesichter von Personen als Vorbereitung zur Geometrie zeichnen müssen. Solche Irrgänge des näheren zu beschreiben, um vor ihren Fehlern zu warnen, fehlt uns die Zeit und der Platz; das im vorstehenden Gesagte muß genügen, dem Anfänger im Lehramt die Wege anzudeuten, welche nach der persönlichen Ansicht des Verfassers für den vorbereitenden Unterricht die richtigen sind. Möglich ist auch, daß einzelne brauchbare Schriften nicht zur Kenntnis des Verfassers gelangt sind.

Als Hilfsmittel für den propädeutischen Unterricht neben Lineal und Reißzeug kann benutzt werden: Mauritius, der Transporteur und

Maßstab, Koburg bei Riemann (4. Aufl. 1884, Preis 75 Pfg.). Ferner soll Korschel in Strausberg Transporteure auf rotem Kartonpapier zu 1 *M.* 50 ₰ für 50 Stück, sowie Maßstäbe zu 1 *M.* für 50 Stück liefern. Auch die weißen Transporteure von J. Scholz in Mainz sind als gut empfohlen worden. (Nach Ackermann-Cassel in der Programmschau der Zeitschr. f. math.-naturw. Unterricht, 1884.)

b) Der wissenschaftliche Unterricht.

§ 42. Der Beginn der Planimetrie und die Grundbegriffe.

Daß überall, wo ein genügender Vorbereitungskursus vorausgegangen, schon der Quartaner reif ist für das Verständnis der Anfangsgründe der Planimetrie, ist schon im vorhergehenden ausgesprochen worden. Wo jene Voraussetzung nicht erfüllt ist, bleibt nichts übrig, als entweder den propädeutischen Unterricht in der Quarta nachzuholen und den wissenschaftlichen in Untertertia zu beginnen, oder den letzteren in Quarta möglichst so zu gestalten, daß der Ausfall einer besonderen Propädeutik nach und nach durch allmählichen Übergang von der Anschauung zur abstrakten Theorie verschmerzt wird. Das letztere ist schwieriger als jenes, aber die Größe des mathematischen Schulpensums im Vergleich zu der dargebotenen Zeit wird es vielen wünschenswert erscheinen lassen, daß der Unterricht in Quarta nicht ganz für die Behandlung des Systems verloren gehe.

Von anderer Seite ist im Gegensatz hierzu verlangt worden, daß die Geometrie nicht begonnen werden solle, ehe die Schüler die Anfangsgründe der Arithmetik gelernt haben, weil von letzteren schon in den ersten planimetrischen Abschnitten Gebrauch gemacht werde (Kober in d. Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht XV, 2.) Da schwerlich der Rechenunterricht schon mit Quinta abgeschlossen werden kann, die Anfänge der Arithmetik wohl kaum früher als in Untertertia gelehrt werden können, so würde dies eine erhebliche Verschiebung des Beginnes der Geometrie erfordern. Wir halten dies nicht für notwendig, denn die wenigen arithmetischen Beziehungen, welche in den Anfängen der Planimetrie vorkommen, sind so einfach, daß ein mit der nötigen Rücksichtnahme auf die Vorbereitung für die Buchstabenrechnung erteilter Rechenunterricht hinreichen kann, die Schwierigkeiten zu beseitigen. Man kann die Sache auch umdrehen und gerade die leichten, an anschauliche Objekte geknüpften arithmetischen Relationen der Planimetrie, wie $\alpha = \beta$, $\beta + \gamma = 90^0$ u. s. w., als Vorübung zur Arithmetik behandeln. So ist beispielsweise der Satz, daß die Summe der Innenwinkel eines jeden n-Ecks gleich $2n - 4$ Rechten sei, sehr geeignet, das erste Verständnis des Gebrauchs der Buchstaben als allgemeiner Zahlzeichen zu vermitteln, wenn man den Beweis zuerst für

eine Reihe besonderer Fälle ausführt und aus ihnen das Allgemeine abstrahieren läßt.

Der Unterricht beginnt in der Regel mit einer Erörterung der Begriffe Körper, Fläche, Linie und Punkt, der Unterscheidung von geraden und krummen Linien und der Definition der Ebene. Man hüte sich hierbei vor dem Bestreben, diese Begriffe metaphysisch-abstrakt feststellen und begründen zu wollen; dafür hat der Anfänger absolut kein Verständnis. Es muß hier genügen, dieselben anschaulich klar zu machen, bezw. die im Vorbereitungskursus bereits gewonnenen Anschauungen scharf zu formulieren. Daß eine Fläche die Grenze eines Körpers ist, daß dieselbe keine Dicke, wie die Linie keine Breite, der Punkt keine Länge hat, das versteht der Schüler leicht, zumal wenn ihm nicht von vornherein zugemutet wird, bei der Fläche vom Körper zu abstrahieren, jene also von diesem gelöst sich vorzustellen. Vielmehr ist hier ausdrücklich zu bemerken, daß Flächen nur an Körpern, wie Linien an Flächen oder Körpern, Punkte an Linien u. s. w. vorkommen können. Der Schüler wird dann auf erläuternde Fragen, z. B. wie tief man mit einer Nadel in einen Körper hineinstechen dürfe, damit die Spitze derselben nicht aus der Grenzfläche heraus und in das Innere des Körpers hinein gelange, von selbst die Antwort finden: gar nicht. Auch daß durch Aneinanderreihen von Punkten wie Perlen an einer Schnur keine Linie, durch Aneinanderlegen von Linien keine Fläche, sowie durch Aufeinanderlegen von Flächen gleich den Blättern eines Buches kein Körper entstehen, wohl aber durch Bewegung des Punktes eine Linie, der Linie eine Fläche beschrieben werden könne u. s. w., versteht und findet schon der Quartaner, und man mag sich dabei zur Verdeutlichung des Bildes einer sich bewegenden Schreibstiftspitze, oder der Spitze eines Stockes im Schnee und Sande, der schneidenden Bewegung einer Messerkante u. dgl. m. bedienen. Dagegen sind abstrakte Untersuchungen, z. B. über Begriff und Wesen des Raumes, die Möglichkeit oder Unmöglichkeit, denselben oder seine Teile zu bewegen, und ebenso sind unklare Definitionen, wie die Euklidschen: Ein Punkt ist, was keine Teile hat, eine Linie ist eine Länge ohne Breite u. dgl. m., zu vermeiden. Ebenso quäle man sich nicht ab, dem Anfänger eine wissenschaftlich durchaus haltbare Definition der geraden Linie oder des Winkels zu geben und der Ebene zu ihrem Rechte, demonstriert zu werden, zu verhelfen. Die Schwierigkeiten, welche die Feststellung dieser Begriffe in unantastbarer Formulierung gereiften Mathematikern gemacht hat, sollten davor warnen, eine solche Feststellung dem Begriffsvermögen eines elf- bis zwölfjährigen Kindes zuzumuten. Wir müssen vielmehr im Unterricht eine Anzahl von Grundbegriffen als durch die äußere und innere Anschauung gegeben annehmen, um auf denselben dann die Entwickelung neuer Begriffe und Wahrheiten von weniger unmittelbar einleuchtender Art systematisch aufzubauen. Viele Mathematiker haben sich vergeblich bemüht, eine vorwurfsfreie Defi-

nition der geraden Linie zu geben, kein einziger derselben würde aber deshalb zugegeben haben, daß ihm der Begriff der Geraden nicht völlig klar sei. Wie die Axiome an die Spitze des Systems gestellt werden, als Sätze, deren Wahrheit unmittelbar einleuchte und daher eines Beweises nicht bedürfe oder fähig sei, ebenso dürfen die einfachsten Grundbegriffe als solche vorausgesetzt werden, welche man nicht imstande sei auf noch einfachere zurückzuführen, die vielmehr durch innere Anschauung oder Erfahrung unmittelbar gegeben und höchstens der Erklärung und Erläuterung bedürftig seien. Die Untersuchung, ob die so zu Grunde gelegten Begriffe wirklich die einfachsten sind, ob es also nicht möglich sei, dieselben auf noch einfachere zu stützen, ist im Unterricht ebenso wertlos, wie die Bemühungen, dieses oder jenes Axiom aus der Reihe der Grundsätze zu streichen und als eines Beweises fähig nachzuweisen. Es darf eben niemals vergessen werden, daß wir unseren Schülern nicht durchweg fertige Wissenschaft geben können, sondern daß wir dieselben erst zum Verständnis der Wissenschaft allmählich heranziehen sollen. So sagt u. a. auch Helmes (Vorrede zur Elementarmathematik II, 1): Nicht sowohl die Legung oder Befestigung des Fundaments, als der sichere Aufbau der Wissenschaft auf gegebenem Fundament ist die nächste Aufgabe des Unterrichts.

§ 43. Die Methode der neueren Geometrie.

An dieser Stelle tritt auch bereits eine andere Frage an den Lehrer heran, welche gegenwärtig auf der Tagesordnung der methodischen Diskussionen steht, die Frage nach der Einführung der Anschauungsweisen und der Methode der sog. neueren oder synthetischen Geometrie in den Schulunterricht.

Eine Anregung zur Erörterung derselben gab u. a. die 1872 in Zarnckes Litterarischem Centralblatt veröffentliche Recension eines geometrischen Lehrbuchs durch folgende Bemerkung: „— und doch dürfte nur eine wesentlich von der bisherigen abweichende und dieselbe verbessernde Darstellung der Elementargeometrie es rechtfertigen, daß zu der großen Zahl geometrischer Elementarbücher, welche die deutsche Litteratur aufzuweisen hat, noch ein neues hinzukommt. Das Bedürfnis einer solchen Umgestaltung der geometrischen Elemente hat sich schon längst fühlbar gemacht. Es gilt vor allen Dingen, einen großen Teil der Sätze, die man jetzt gewöhnlich in den Anfangsgründen der sogenannten neueren Geometrie behandelt, mit dem von altersher üblichen Materiale zu einem einheitlichen Ganzen zu verarbeiten. Aber es ist eben eine systematische Verarbeitung dieser Lehren nötig; es genügt nicht, nach Art unseres Verfassers und anderer Schriftsteller vor ihm, anhangsweise die Lehre von der harmonischen Teilung, der polaren Beziehungen am Kreise u. dergl. m. mit aufzunehmen."

Im Anschluß hieran sagt z. B. V. Schlegel in Hoffmanns Zeit-

schrift VII, S. 182: „Es könnte in Verwunderung setzen, daß die gewaltigen Reformen Steiners so ganz spurlos an dem auf der Schule behandelten geometrischen Stoffe vorübergegangen sind, wenn man sich nicht vergegenwärtigen müßte, daß eben bisher kaum etwas geschehen ist, um den großen Grundgedanken Steiners: die Einordnung aller geometrischen Wahrheiten in ein den Verstand befriedigendes System, auch für die Elemente der Geometrie fruchtbar zu machen. So sehen wir denn die Geometrie der Schule wesentlich zurückgeblieben hinter den Anforderungen der Zeit. Während die Lehrbücher nach wie vor das alte Thema der Kongruenzsätze variieren, finden die Lehren der neueren Geometrie, weil sie eben dem veralteten Rahmen unmöglich eingepaßt werden können, höchstens in Anhängen eine Stelle, und vergebens tönt der Ruf einzelner Rezensenten, daß nur von einem vollständigen Bruch mit den alten Anschauungen und Methoden eine wissenschaftlich befriedigende Neugestaltung der Geometrie erwartet werden kann."

Ganz ohne Folgen ist dieser Ruf übrigens nicht geblieben, denn es liegt gegenwärtig bereits eine Anzahl von Lehrbüchern vor, welche die im vorstehenden ausgesprochenen Ansichten in die Praxis zu übertragen suchen. So des zuletzt genannten Autors eigenes Werk „Lehrbuch der elementaren Mathematik, Wolfenbüttel J. Zwißler", ferner Kruse, Elemente der Geometrie, Berlin, Weidmann, sowie H. Müller, Leitfaden der ebenen Geometrie und Leitfaden der Stereometrie, Leipzig, B. G. Teubner. Das letztere Werk insbesondere ist gut empfohlen worden durch ein Urteil des berühmten Mathematikers Prof. Clebsch über das Manuskript des ersten Teils, in welchem derselbe eine Umbildung vieler Teile der in den Schulen gelehrten Geometrie an der Hand der neueren Geometrie für ein Bedürfnis der Zeit erklärte und den vorliegenden Leitfaden als eine willkommene Gabe für die Schule bezeichnete, sowie durch eine Resolution der mathematisch-naturwissenschaftlichen Sektion der 31. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner, welche unter Hinweis auf das H. Müllersche Buch dahin lautete, daß im Unterrichte der Elementargeometrie die Euklidische Geometrie dem System nach bestehen bleiben, aber im Geiste der neuern Geometrie reformiert werden solle.

Zu den hierher gehörigen Schriften, welche für den Schulgebrauch bestimmt sind, ist ferner zu rechnen: Worpitzky, Elemente der Mathematik 3. und 4. Heft, Berlin, sowie als die neueste: Henrici u. Treutlein, Lehrbuch der Elementargeometrie, Leipzig, Teubner.

Wir haben im vorstehenden absichtlich die eigenen Worte verschiedener Vertreter der in Rede stehenden Ansicht angeführt, um die von ihnen an den geometrischen Unterricht gestellte Forderung unbeeinflußt durch fremde Auffassung darzulegen. Wir vermissen aber in diesen Äußerungen eine ausreichende Begründung durch den Nachweis, daß die geplante Änderung zu einer besseren und vollständigeren Er-

reichung der besonderen Aufgaben unseres Schulunterrichts nützlich oder notwendig sei.

Das Einzige, was uns darüber bis dahin angegeben wurde, ist, daß die geplante Neugestaltung der Elementargeometrie die letztere erst zu einem wissenschaftlich befriedigenden System gestalte. Worin liegen nun die wissenschaftlichen Vorzüge der neueren Geometrie? Eine Antwort hierauf entnehmen wir dem ausgezeichneten Vortrage, den Prof. Hankel bei seinem Eintritt in den akademischen Senat in Tübingen gehalten hat:*) „Wenn die griechischen Geometer in formaler Hinsicht mustergiltig und durch ihren eminenten Scharfsinn, sowie eindringende Erfindungsgabe für alle Zeiten bewundernswürdig sind, so fehlt ihnen doch Eine Seite der wissenschaftlichen Auffassung, auf welche sich der Sinn der neueren Völker mit besonderer Vorliebe gerichtet hat: sie kennen nur den synthetisch vorschreitenden Entwickelungsgang; es fehlen ihnen allgemeine Prinzipien und Methoden; sie haben eine entschiedene Vorliebe für das Spezielle und für die enge Begrenzung der Begriffe. So viele verschiedene Fälle in bezug auf die Lage der Linien in einer Aufgabe möglich sind, so viele verschiedene Probleme sind für den griechischen Geometer vorhanden, und die größten Mathematiker des Altertums haben es für notwendig gehalten, in ihren Schriften die sämtlichen denkbaren, oft sehr zahlreichen Fälle von einander unabhängig, alle mit derselben Ausführlichkeit zu erledigen. Die Methode zu entwickeln, nach der diese verschiedenen Fälle behandelt werden könnten, die Begriffe in entsprechender Weise zu erweitern, um aus den konkreten Fällen ein allgemeines Resultat zu abstrahieren, kommt ihnen nicht bei. — So opfert die antike Geometrie zu gunsten einer scheinbaren Einfachheit und Anschaulichkeit die wahre Einfachheit auf, welche in der Allgemeinheit der Prinzipien, und die wahre Anschaulichkeit, welche in der Erkenntnis des Zusammenhangs geometrischer Gestalten in allem Wechsel und in aller Veränderlichkeit ihrer sinnlich vorstellbaren Lage beruht. Vergleichen wir ein mathematisches Problem mit einem gewaltigen Felsen, in dessen Inneres wir eindringen wollen, so erscheint die Arbeit des griechischen Mathematikers uns als die eines rüstigen Steinhauers, der mit Hammer und Meißel in unermüdlicher Ausdauer den Felsen langsam von außen her zu zerbröckeln beginnt, der moderne Mathematiker aber als ein trefflicher Minierer, der diesen Felsen zunächst mit wenigen Gängen durchzieht, von denen aus er dann den Felsblock mit einem gewaltigen Schlage zersprengt und die Schätze des Innern zu Tage fördert."

Diese Worte kennzeichnen vortrefflich den Gegensatz zwischen der alten und der neuen Methode, und es ist sehr leicht zu verstehen, wenn die Kenner der letzteren in Begeisterung für dieselbe den Wunsch hegen,

---

*) Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten. Tübingen 1869.

die gewaltigen und unbestreitbaren wissenschaftlichen Vorzüge derselben auch dem Schulunterricht zu teil werden zu lassen. Allein gerade die obigen Worte können auch dazu benutzt werden, ein wichtiges Bedenken gegen die gewünschte Neuerung zu begründen. Die so gut geschilderte Art der Thätigkeit der alten Mathematiker stimmt überraschend mit dem Verfahren überein, welches die auf psychologischem Grunde fußende Pädagogik allgemein als dasjenige bezeichnet, durch welches sich der allmähliche Entwickelungsgang der langsam wachsenden Erkenntnis des einzelnen Menschen vollziehe. Der Weg vom Allgemeinen zum Besonderen ist der Gang der fertigen Wissenschaft, der entgegengesetzte vom Besonderen zum Allgemeinen derjenige, auf welchem das Verständnis dieser Wissenschaft von dem werdenden Geiste, wie in der Geschichte der Wissenschaft selbst, so in dem Bildungsgange des Einzelnen, erworben wird.

Wer also beispielsweise schon im ersten Unterricht metrische Relationen zwischen Strecken, wie $AB + BA = 0$, behandelt, wer fast unmittelbar nach der Definition des Winkels so allgemeine Begriffe, wie die des Strahlenbüschels und der Punktreihe mit ihren Beziehungen zu einander, mit Sätzen über kongruente gleichwendige oder gegenwendige Strahlenbüschel u. dgl. m., dem Verständnis des Anfängers zumuten zu dürfen glaubt, oder wer bereits auf deu ersten Stufen des Unterrichts von vollständigen n-Ecken und n-Seiten, von der Unterscheidung zwischen Kongruenz, Affingleichheit, Affinität, Ähnlichkeit und Kollineation und von derartigen allgemeinen Begriffen mehr redet, der mag wohl ein wissenschaftlich gut begründetes System aufbauen, aber er verkennt die Aufgabe unseres Schulunterrichts, welche nicht dahin geht, dem Schüler stets fertige Wissenschaft zu bieten, sondern ihn zum Verständnis derselben allmählich heranzubilden. „Der elementare Unterricht soll nicht sowohl durch Wissenschaft als zur Wissenschaft erziehen". (Helmes, Vorrede.) Die schönste Wissenschaft kann da nichts nützen, wo sie nicht verstanden wird.

Man wolle diese Äußerung nicht mißdeuten! Es soll damit nicht geleugnet werden, daß auch Schriften, welche die Geometrie in der angegebenen Weise behandeln, einen Wert für die Schule haben können, indem sie Zielpunkte zeigen, deren Erreichung zu erstreben ist. Wir wollen auch nicht bestreiten, daß es Fälle geben kann, in denen ein Unterricht auf dem bezeichneten Wege möglich und nutzbringend ist. Nicht nur hängt vieles von der Befähigung der jeweiligen Schüler ab, auch die Eigenart des Lehrers spielt bei solchen Fragen eine Rolle. Nur das muß entschieden bezweifelt werden, daß ein Unterricht in den angegebenen Bahnen als Regel für unsere höheren Schulen hingestellt werden könne.

Die Einführung der Anschauungsweisen und der Methode der neueren Geometrie in den elementaren Unterricht bietet aber nach der Ansicht ihrer Verfechter noch andere Vorteile: sie erzielt nicht bloß

einen wissenschaftlicheren Aufbau des Systems, sondern durch denselben auch eine bessere Schulung des Erkenntnisvermögens. Denn durch sie treten die gegenseitigen Beziehungen der geometrischen Formen, die Gesetze ihrer Abhängigkeit von einander klarer und umfassender hervor, so ganz besonders durch das Prinzip der Reciprocität (Dualität, Polarität). Auch führe in der modernen Betrachtungsweise die Entstehung der Gebilde durch die Bewegung und die Änderung ihrer Lage zu einer größeren Anschaulichkeit und natürlicheren Beweisführung. Die Geometrie der Alten stehe demnach nicht bloß in bezug auf die Einheit des Systems, sondern auch in bezug auf die Anregung und Bildung der Vorstellungskraft weit hinter der Geometrie der Lage zurück.

Jeder Kenner der neueren Geometrie wird diesen Angaben unbedingt beistimmen, sobald es sich nur um eine Vergleichung mit der alten Euklidschen Behandlungsweise der Geometrie handelt. Zwar die Einführung des Prinzips der Dualität in die ersten Anfangsgründe dürfte manchen Bedenken unterliegen; sie wird den Schülern der Quarta und Tertia in der Regel als kaum etwas anderes erscheinen, wie die äußerliche Nebeneinanderstellung ähnlich klingender Sätze zu beiden Seiten eines durch die Mitte der Buchseite verlaufenden Striches. Denn das Verständnis der inneren Bedeutung jenes Prinzips, wie seiner wissenschaftlichen Anwendung wird dem Durchschnittsschüler jener Klassen noch verschlossen sein; seine Erkenntnis baut sich nicht an dem Nebeneinander reciproker Gebiete, sondern an dem Nacheinander der einzelnen, jedes für sich behandelten auf, gerade so, wie auf dem Gebiete der Naturbeschreibung zuerst die Erforschung der einzelnen Gestalten geübt werden muß, ehe an die Vergleichung verwandter, die Untersuchung ihrer gegenseitigen Beziehungen und das Verständnis der die letzteren bedingenden Gesetze herangetreten werden kann.

Auch entspricht die extreme Durchführung des Parallelismus zweier Sätze häufig nicht der naturgemäßen Gruppierung nach anderen für die Schule besonders wichtigen Prinzipien. Nehmen wir z. B. den Satz: Die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks sind gleich, oder wie wir ihn lieber aussprechen: Gleichen Seiten eines Dreiecks liegen gleiche Winkel gegenüber, so stellt sich demselben nicht bloß seine Umkehrung zur Seite: Gleichen Winkeln eines Dreiecks liegen gleiche Seiten gegenüber, sondern auch sein Gegensatz: Der größeren Seite eines Dreiecks liegt ein größerer Winkel gegenüber, und die Umkehrung des Gegensatzes: Dem größeren Winkel eines Dreiecks liegt die größere Seite gegenüber. Wir haben schon früher (S. 57) darauf hingewiesen, wie in der Aufstellung der vier Sätze einer solchen Gruppe gleichsam in Form eines von seinen Diagonalen durchschnittenen Vierecks ein praktisches Beispiel zur formalen Logik enthalten ist, insofern vorgerücktere Schüler erkennen werden, wie von je zwei durch eine Diagonale verbundenen Sätzen der eine durch den

andern bedingt ist. Später wird der innere Grund des Zusammenhangs der vier obigen Sätze genauer erkannt durch den dieselben in einer höheren Einheit zusammenfassenden und bestimmter ausführenden Satz, daß das Verhältnis je zweier Seiten eines Dreiecks gleich dem Verhältnis der Sinus der gegenüberliegenden Winkel ist.*) Der Forderung des Ausgangs vom Allgemeinen nach Art der Methode der neueren Geometrie würde es übrigens entsprechen, wenn mit diesem Sinussatze begonnen, derselbe allein bewiesen und dann jene vier zusatzweise als einzelne Fälle aus ihm abgeleitet würden. Dieses Verfahren wäre vielleicht theoretisch ausführbar, allein wer würde nicht einsehen, daß in diesem Beispiel der Gang vom Besonderen zum Allgemeinen der pädagogisch richtigere, sowie daß die obige Vereinigung der vier Sätze zu einem zusammenhängenden Ganzen unter möglichst gleichartiger Beweisführung der einzelnen didaktisch zweckmäßig ist?

Man wird aber auch zugeben müssen, daß alle gegen die Einführung der neuen Methoden und Principien gerichteten Einwände nur bis zu einem gewissen Grade giltig sind. Die unbestreitbar richtige Forderung der Didaktik des elementaren Unterrichts, daß derselbe in den Anfangsgründen vom Besonderen zum Allgemeinen fortzuschreiten habe, darf nicht dahin ausgelegt werden, daß überall die Ausnahmen (die einzelnen Fälle) der Regel (dem allgemeinen Problem) vorausgehen müßten. Auch darf man nicht vergessen (wie schon im § 34 bemerkt wurde), daß jene Forderung nur eine solche der Didaktik ist, welche unbedingt da fallen muß, wo sich die Rücksicht auf das mangelhafte Verständnis ungereifter Schüler dem entgegengesetzten wissenschaftlicheren und ausgiebigeren Verfahren nicht entgegenstellt. In diesem Sinne wird jene Resolution der 31. Philologenversammlung allgemeine Zustimmung finden, daß die Euklidsche Geometrie im Unterrichte zwar dem System nach bestehen bleiben, aber im Geiste der neueren Geometrie reformiert werden solle, und man wird nur das Eine zu entgegnen haben, daß dies bereits überall, wenn auch in verschiedenem Grade, geschehe oder doch angestrebt sei.

Daß nämlich zunächst diejenigen Seiten der neueren Methode, durch welche das Verständnis und die Einsicht nicht erschwert, sondern vielmehr erleichtert wird, daß also der Gewinn größerer Anschaulichkeit und natürlicherer Beweisführung mittels des Hinweises auf die Entstehung der Gebilde durch die Bewegung und die Änderung ihrer Lage auch dem Schulunterricht zugute kommen muß, das ist genau eine Forderung der genetischen Methode. Diese Forderung kann recht wohl erfüllt werden, ohne daß deshalb eine Revolution des Systems notwendig ist. Gewiß hat R. Sturm recht, wenn er (Zeitschr. f. mathemat. und naturw. Unterricht I, S. 482) sagt, die alte Euklidsche Geometrie sei vorzugsweise eine Geometrie des Maßes und die auf derselben

*) Nach dem Pädagog. Archiv XVII, S. 265.

fußende Schulgeometrie müsse von der neueren, die ja oft geradezu Geometrie der Lage genannt werde, mehr und mehr eine größere Berücksichtigung der Lage lernen. Es ist richtig, daß die Schüler nicht bloß für die Gleichheit von Längen, die Kongruenz, Flächengleichheit oder Ähnlichkeit von Figuren und dergleichen Größenverhältnisse einen Beweis für nötig erachten dürfen, sondern daß sie lernen sollen, einen solchen auch für den Fall führen, daß drei gewisse Punkte der nämlichen Geraden angehören, daß drei gewisse Linien einander in demselben Punkte treffen. Sie sollen auch z. B. die möglichen wechselnden Lagen einer Geraden gegen einen Kreis oder zweier Kreise zu einander mit ihren gegenseitigen Bedingungen kennen und untersuchen lernen, und insbesondere in der Diskussion (Determination) von Konstruktionsaufgaben, in der Untersuchung der verschiedenen gleichmöglichen, wie der Ausnahmefälle in der veränderlichen Lage und Größe der gegebenen oder der konstruierten Gebilde ein reiches Feld für derartige Übungen finden.

Die Zeit, in welcher unser geometrischer Schulunterricht nur der „starren" Methode Euklids folgte, liegt noch nicht lange hinter uns, ja sie ragt in einzelnen Ausläufern noch bis in die Gegenwart hinein. Noch vor wenigen Jahren wurde von einem der Leiter des Schulwesens in einer preußischen Provinz der engste Anschluß an Euklid im Unterricht gefordert, und infolge dessen kam es vor, daß an einer Anstalt eine Übersetzung der Elemente Euklids als Lehrbuch in den Händen der Schüler war. Die Vorwürfe, welche die Verfechter der neueren Geometrie gegen den seitherigen Schulunterricht erhoben haben, dürften zum Teil gegen jene ältere Methode gerichtet sein.

Sodann ist es richtig, daß manche schärfere Begriffsbestimmungen mit ihren unterscheidenden Benennungen schon für den Anfangsunterricht in der Geometrie Verwendung finden sollten. Die Unterscheidung z. B. zwischen (unbegrenzter) gerader Linie, Strahl und Strecke ist schon dem Quartaner verständlich zu machen, und dieselbe erleichtert schon in den ersten Partien die Präcision des Ausdrucks und die Klarheit des Denkens. Ähnliches gilt von anderen Fällen.

Endlich beziehen sich die Einwände gegen die Einführung der neueren Geometrie im wesentlichen nur auf den ersten Anfangsunterricht. Es ist gewiß, daß man dem schon gereifteren Schüler oberer Klassen in betreff des Abstraktionsvermögens mehr zumuten kann und soll, damit die ihm werdende Schulung auch seine Kräfte gehörig in Anspruch nehme und ansporne. „Man hat auch gefragt, wo der zukünftige Mathematiker und vor allem der zukünftige Mathematiklehrer einen von allen pädagogischen Rücksichten losgelösten, rein wissenschaftlichen Aufbau der Elemente kennen lernen solle, wenn ein solcher nicht durch die Schule geboten werde, da er ja mit dem Eintritt in die Universität sogleich die Elementarmathematik hinter sich lasse. Man könnte darauf erwidern, daß die Schule eben keine Anstalt zur speziellen

Ausbildung künftiger Mathematiker sei, und also auch ihren mathematischen Unterricht nicht diesen Wenigen zu liebe auf Kosten des Interesses der Mehrheit gestalten dürfe; man kann es ferner für falsch erklären, wenn der angehende Mathematiker auf der Universität der fortgesetzten Beschäftigung mit den Elementen entsagt und denselben entfremdet wird, statt eine wünschenswerte Anleitung für eine wissenschaftliche und methodische Behandlung desjenigen Gebietes zu finden, welches später vielleicht den eigentlichen Gegenstand seines Berufs bilden wird; man kann endlich darauf hinweisen, daß heutzutage auch auf der Universität von Keinem ein Abschluß seiner wissenschaftlichen Ausbildung, sondern nur ein Anfang derselben erzielt wird, und daß wir alle das Meiste und das Beste für unseren Beruf erst durch die Arbeit der späteren Jahre erwerben, wo dann der junge Mathematiklehrer die beste Anregung und Gelegenheit finde, auch den wissenschaftlichen Aufbau der Elementarmathematik mit reiferem Verständnis und Interesse zu studieren. — Allein man braucht keineswegs auf eine rein wissenschaftliche Behandlung auch auf der Schule zu verzichten, nur verlege man dieselbe dahin, wo sie ihren Zweck am ehesten erreichen kann, in einen Repetitionskursus der Prima (oder Obersekunda). Ein solcher wird immer zweckmäßig, wenn nicht notwendig sein, und die Zeit dafür muß sich finden lassen. Derselbe soll aber nicht eine trockene, unveränderte Wiederholung des bereits Gelernten in gleicher Gestalt und Anordnung sein, welche ermüdend wirkt, sondern er soll das Alte durch neue Gesichtspunkte beleben, hier und da auch durch neuen, weiter ausführenden Stoff ergänzen und zu einem zusammenhängenden, einheitlichen Bilde gestalten." *)

§ 44. Die Lehren der neueren Geometrie.

Eine andere Frage ist die, ob und inwieweit auch der sachliche Inhalt der neueren Geometrie in den Schulunterricht aufgenommen werden soll. Auch die Verfasser solcher Lehrbücher, welche bei dem älteren Verfahren bleiben, haben doch mehrfach einen Teil der Lehren der „Geometrie der Lage" aufgenommen, indem sie einzelne leichtere Partien in Schlußkapiteln oder Anhängen behandeln. Gegen dieses Verfahren ist u. a. von Seiten eines technischen Hochschullehrers, des Prof. Hauck, in der mathematisch-naturwissenschaftlichen Sektion der Tübinger Philologenversammlung 1876 energischer Widerspruch erhoben worden: Derselbe sagte u. a.: „Man hat seit längerer Zeit die Manier, einzelne Sätze aus der neueren Geometrie der Euklidischen Geometrie als Anhang hinzuzufügen und glaubt damit das Bedürfnis (der Aufnahme der neueren Geometrie in den Lehrplan unserer höheren Lehranstalten) befriedigt zu haben. Es gehören hierher z. B. die Sätze

*) Nach dem päd. Archiv XX, 374.

von der harmonischen Teilung, von den Transversalen, vom Ähnlichkeitspunkt, von der Potenzlinie, von Pol und Polare u. a. — Während diese Sätze im System der neueren Geometrie sich fast spielend von selbst ergeben, müssen sie dann — herausgerissen aus dem System — mit eigenen Beweisen im Geiste der Euklidischen Geometrie versehen werden. Damit haben sie aber aufgehört, der neueren Geometrie anzugehören. Der Grundcharakter der neueren Geometrie besteht ja nicht im Stoff, sondern in der Methode. Sobald man also einen ihr entnommenen Stoff nach antiker Methode behandelt, so ist es keine neuere Geometrie mehr, sondern antike. Und in der That waren auch die genannten Sätze alle schon den Alten bekannt, sie finden sich alle ohne Ausnahme schon bei Pappus. Wo bleibt da die Berechtigung auf den Namen „Neuere Geometrie"? Es kommt mir das genau ebenso vor, wie wenn man aus einer gotischen Kirche Bausteine herausnehmen, dieselben zu einem Bau in romanischem Stil verwenden und diesen Bau dann als gotisch ausgeben würde. Ich gehe jedoch noch weiter und erkläre dieses Verfahren in gewissem Sinne sogar für gefährlich. Schließt man den Geometrieunterricht mit jenen Sätzen ab, ohne später noch die eigentliche neuere Geometrie hinzuzufügen, so schadet es am Ende nicht viel, wiewohl ich auch den Nutzen nicht allzuhoch anschlage. Der eigentliche Wert und das innere Wesen jener Sätze kommt bei dieser Behandlung nicht entfernt zur Geltung. Immerhin aber finden dieselben z. B. in der Gergonneschen Lösung des Taktionsproblems, welche gewöhnlich den Schlußstein der Betrachtung bildet, eine interessante und pikante Anwendung. Nur belüge man dann sich selbst und die Schüler nicht mit der Behauptung, das sei neuere Geometrie." — „Anders gestaltet sich jedoch die Sache, wenn der Schüler in einem späteren Kurs in die eigentliche neuere Geometrie eingeführt werden soll. In diesem Falle halte ich das besprochene Verfahren geradezu für einen pädagogischen Fehler. Werden jene Sätze, welche die Fundamentalsätze der neueren Geometrie bilden, an den Schluß der Euklidischen Geometrie gesetzt, so gewinnen sie hierdurch den Charakter des Höchsten und Schwierigsten im ganzen Verlauf des Geometrieunterrichts; sie sind es auch zum Teil, weil man ihnen die natürlichen Beweise, durch welche sie sich spielend ergeben, nimmt, und sie mit verzwickten künstlichen Beweisen versieht, die ihrem ganzen Charakter widersprechen. Die Folge davon ist, daß sich bei dem Schüler eine falsche Vorstellung von dem Wesen der eigentlichen neueren Geometrie festsetzt, und daß er mit einem Vorurteil, mit einem geheimen Grausen an das Studium derselben herantritt." Es folgt diesen Worten die Erklärung, daß dieselben nur gegen jenes Anhängen an den Schluß, nicht aber gegen ein Einstreuen und systematisches Verweben gerichtet seien.

Die Freunde der „Anhänge" werden schwerlich vor dieser beredten Anklage die Segel streichen. Ein großer Teil der obigen Ausführungen

ist doch nur ein Streit um ein Wort, einen Namen. In der Frage, ob der stoffliche Inhalt jener Abschnitte dem älteren Schulpensum anzufügen sei, spielt doch diejenige, ob man dann demselben auch den Namen neuere Geometrie beilegen dürfe, zunächst gar keine Rolle. Lassen wir für jene Anhänge nur den Namen fallen, so fällt damit auch jener Teil der obigen Erörterung vollständig. Aber selbst für den Gebrauch dieses Namens lassen sich einige Gegengründe einwenden. Wenn die Alten auch jene Sätze gekannt haben, so haben sie doch heute nur deshalb besondere Beachtung gefunden, weil sie — wie oben auch gesagt ist — die Fundamentalsätze der neueren Geometrie bilden. Und weil sie dies sind, so können sie auch als Sätze aus der letzteren bezeichnet werden, insofern damit zugleich ausgesprochen ist, daß nur herausgenommene Bruchstücke, also eben nur die „Steine aus dem gotischen Bau" benutzt seien. Die Überschrift „neuere Geometrie" freilich darf den Anhängen nicht gegeben werden, aber ist denn die Annahme, daß dies von den Urhebern der letzteren (immer?) geschehen sei, auch richtig? Was nun die sachliche Seite betrifft, so wird in den obigen Erörterungen selbst durch die Erwähnung der Gergonneschen Lösung des Apollonischen Problems dem Gebrauche der Anhänge an den Gymnasien, welche nicht die Zeit haben, die neuere Geometrie selbst zu lehren, ein gewisses Zugeständnis gemacht. Wir möchten dazu noch die Berücksichtigung einiger Bedenken empfehlen, welche freilich Hochschullehrern fern zu liegen und daher von denselben, wenn sie über Fragen des elementaren Unterrichts urteilen, mehr oder minder unbeachtet gelassen zu werden pflegen, während sie denen, welche die Urteile in der Praxis ausführen sollen, recht deutlich nahe treten: Durch die Einfügung jener Abschnitte aus der neueren Geometrie in das System der älteren wird das Unterrichtspensum erheblich vergrößert, und es wird nicht überall möglich sein, das so angewachsene Gebiet durchzuarbeiten. Denn unsere Schüler sind die längste Zeit des Unterrichts hindurch Kinder, welche erst denken lernen sollen, nicht gereifte junge Männer; auch können dieselben der Mathematik nur einen geringen Bruchteil ihrer Lernzeit widmen, und die wenigsten sind selbst in der Prima in der Lage, den mathematischen Disciplinen dasjenige Interesse und die besondere Befähigung zuwenden zu können, welche bei den Studierenden der Mathematik an einer Hochschule als Regel vorauszusetzen ist. Ist es da nicht besser, die Möglichkeit zu lassen, daß der Lehrer je nach den gegebenen Verhältnissen die weitergehenden neueren Gebiete ganz oder teilweise streiche? Dies wird aber unmöglich oder mindestens sehr erschwert und mit anderen Nachteilen verbunden sein, wenn der Inhalt dieser Gebiete mit dem der alten „verwebt" ist. Man bedenke ferner die größere Schwierigkeit der in Rede stehenden Abschnitte für das Verständnis, welche es wünschenswert, ja teilweise notwendig macht, dieselben erst auf einer Stufe zu bringen, wo größere Ansprüche an die Fassungskraft der Schüler gestellt werden können; man bedenke

endlich, daß bei jenem Verweben die Beweisführung sich vielleicht noch enger an das Euklidsche Verfahren anschließen müßte, als dies in den Anhängen geschieht, wenn nicht jener gänzliche Umbau, jene Einführung der neueren Anschauungen von den ersten Anfängen des Unterrichts an zur Ausführung kommt, deren Bedenklichkeit im vorhergehenden erörtert ist.

An Schulen, welche einen besonderen Kursus der neueren Geometrie in ihren Lehrplan aufnehmen können, würde es gewiß Thorheit sein, jene einzelnen Gebiete vorher als Anhänge zu der älteren Geometrie, also zweimal zu behandeln. Wo dies aber nicht der Fall ist, bieten die Anhänge jedenfalls eine schätzenswerte Erweiterung des geometrischen Wissens, und daß sie in einer Weise behandelt werden, welche sich dem anschließt, was bis dahin gelernt worden, kann den Eingang zu ihnen nur erleichtern. Die Beweise brauchen auch gar nicht so sehr verzwickt zu sein, und die Behandlung kann immerhin recht wohl dazu dienen, den Schülern eine Vorstellung von der Einfachheit und der Vielseitigkeit allgemeiner Methoden zu geben. Die meisten Lehrer scheinen sich mit dem älteren Pensum zu begnügen und dasselbe für hinreichend zur Ausfüllung der Arbeitszeit der Schule anzusehen; wenigstens sind die neueren Abschnitte in dem verbreitetsten Lehrbuche, dem von Kambly, nicht behandelt. Die Bestrebungen, die Schüler noch einen Schritt weiter zu bringen, sollten eher anerkannt als verurteilt werden, auch wenn denselben die Möglichkeit nicht gegeben ist, die am raschesten fördernden Mittel anzuwenden. Wer in der Lage ist, mit der Eisenbahn eine große Reise machen zu können, um die Welt zu sehen, darf nicht auf den Ärmeren schelten, der ein beschränkteres Gebiet zu Fuße durchwandert.

Auch die Gefahr für die wenigen Schüler, welche etwa später auf der Hochschule neuere Geometrie lernen und vorher die Anhänge durchgearbeitet haben, dürfte nicht so erschrecklich sein. Denn die letzteren bilden bei richtiger Behandlung trotz alledem eine Vorschule für die neuere Geometrie, eine verbindende Brücke zwischen dem Alten und dem Neuen, durch welche die Fremdartigkeit gemildert werden kann, mit welchen die neueren Methoden den nach Euklidischer Art unterrichteten Schülern im Anfange entgegentreten. Und wenn das Vorurteil und das geheime Grausen in Wahrheit vorhanden sein sollten, so werden sie ja vor der neuen Sonne rasch dahinschwinden; ja man kann vielleicht erwarten, daß gerade die Vergleichung der neuen Methoden mit den alten die Einsicht in die ersteren, die Wertschätzung und Bewunderung derselben erhöhen werde.

§ 45. Die Parallelentheorie.

Bei der älteren Behandlungsweise, welche wir im folgenden zu Grunde gelegt denken, bieten die ersten einleitenden Partien bis zu

den Nebenwinkeln und Scheitelwinkeln einschließlich keine weiteren Schwierigkeiten, auch nicht der Begriff des Winkels, welcher schon zu verschiedenen methodischen Auseinandersetzungen Veranlassung gegeben hat. Der Winkel ist im Unterricht unbedingt als Drehungsgröße aufzufassen und zu erläutern. Ihn „mit Bertrand, dem auch Baltzer folgt, als Ausschnitt der Ebene zu definieren, entfremdet ihn doch zu sehr seiner eigentlichsten Natur und führt bei Winkeln, größer als vier Rechte, auf neue Schwierigkeiten; der Begriff der Drehung ist ein wesentlicher." (Helmes, in der Vorrede zu seiner Elementar-Mathematik II, 1.)

Dagegen tritt uns eine Schwierigkeit zunächst bei der Parallelentheorie entgegen. Bekanntlich hat man erst in neuerer Zeit infolge der Arbeiten Bolyais und Lobatschewskys eingesehen, daß diese Theorie nicht durchweg a priori aufgebaut werden kann, sondern daß ein Erfahrungssatz einzuschalten ist. Den früher so zahlreichen Bemühungen, eine vorwurfsfreie Parallelentheorie zu schaffen, also den berüchtigten elften Grundsatz des Euklid oder seine Stellvertreter aus der Welt zu bringen, ist mit dieser Erkenntnis ein Ende gemacht. Dieselben haben aber dem mathematischen Schulunterricht sehr erheblichen Schaden zugefügt. Da sie nur darauf beruhen konnten, daß statt jenes Euklidischen ein anderer Lehrsatz als Axiom hingestellt wurde, dessen Beweisbedürftigkeit mehr versteckt erschien, so unterschieden sich dieselben von einander im wesentlichen nur durch die verschiedene Wahl dieses vermeintlichen Grundsatzes und die durch dieselbe bedingte Verschiedenheit in der Reihenfolge der einzelnen Sätze des Systems. Insofern also diese Reihenfolge nicht aus der inneren Zusammengehörigkeit des sachlichen Inhalts, sondern aus einem anderen Prinzip abgeleitet wurde, mußte dieselbe häufig das Gegenteil genetischer Entwickelung zeigen. Das bunte Durcheinander von Lehrsätzen aus verschiedenen Untersuchungsgebieten, welches auf diese Weise in älteren Lehrbüchern entstand, wirkt durch die Gewohnheit bis heute nach und trägt dazu bei, im Anfangsunterricht die richtige Auffassung des Zusammenhangs der einzelnen Lehren bei den Schülern zu erschweren.

Die einzige Richtschnur, welche heutzutage noch die Wahl des an die Stelle des Grundsatzes der Parallelentheorie tretenden Erfahrungssatzes zu bestimmen hat, ist die, daß seine faktische Richtigkeit möglichst wenig davon entfernt sei, jedem einzuleuchten, und daß derselbe eine ungezwungene Entwickelung der betreffenden Lehren nach ihrem sachlichen Zusammenhang gestatte. Auch die Rücksichtnahme auf einen Übergang zu der sogenannten Nicht-Euklidischen Geometrie oder eine bequem begründete Einführung in dieselbe ist bei dem Anfangsunterricht unserer Schulen ganz auszuschließen.

Als solcher Erfahrungssatz dürfte derjenige, daß durch einen Punkt außerhalb einer Geraden sich zu dieser nur eine einzige Parallele ziehen lasse, den gestellten Anforderungen genügen. Ist derselbe vorausgeschickt, so läßt sich die ganze Parallelentheorie, unabhängig von dem Übergang

zur Untersuchung geschlossener Figuren, also ohne Heranziehung von Sätzen über das Dreieck, in einheitlicher, zusammenhängender Weise mit im übrigen voller Strenge behandeln.

Bequemer für das Verständnis der Schüler ist es, einen der Sätze über die Winkel an parallelen Geraden, etwa den Satz von der Gleichheit der korrespondierenden Winkel an solchen, statt des Grundsatzes zu wählen, also im wesentlichen, wenn auch in veränderter Weise, nach Euklid zu verfahren. In diesem Falle muß aber die thatsächliche Richtigkeit des Satzes, etwa mittels Verschiebung des einen Teils der Figur bis zur Deckung der korrespondierenden Winkel, veranschaulicht werden. Die Behauptungen für die übrigen Winkelpaare werden dann leicht ebenfalls mit Hilfe dieser Deckungen oder ebenso wie die Umkehrungs- und Gegensätze mittels der einfachsten Schlußfolgerungen bewiesen, deren wiederholte Ausführung an immer anderen Winkelpaaren eine vortreffliche Übung für den angehenden Mathematikschüler ist. Nicht zu billigen sind übrigens für jenen ersten Satz angebliche Beweise oder Nachweise, wie der folgende: Parallele Linien haben g l e i c h e Richtungen, folglich haben sie auch gegen eine sie schneidende Gerade gleiche Richtungsunterschiede, d. h. die korrespondierenden Winkel sind gleich. Man sieht leicht, daß hierin keine Veranschaulichung der Richtigkeit des Satzes, wohl aber ein versteckter Zirkelschluß oder doch eine Tautologie gefunden werden könnte.

In betreff der Benennungen der Winkelpaare an parallelen Geraden herrscht leider keine Übereinstimmung; der Lehrer hat sich selbstverständlich hierin ganz nach dem eingeführten Lehrbuche zu richten.

Eine andere hierher gehörige Frage ist diejenige nach der Anzahl der zu unterscheidenden Arten von Winkelpaaren. Über dieselbe hat sich der Verfasser bereits in Hoffmanns Zeitschrift XII, 1 wie folgt ausgesprochen: Von den vier gleich möglichen Arten werden fast allgemein nur drei mit besonderen Namen belegt und nach ihren Beziehungen untersucht, die vierte (die Zusammenstellung eines äußeren mit einem auf der anderen Seite der schneidenden Geraden liegenden inneren Winkel) dagegen mit völligem Stillschweigen übergangen. — Wenn eine wesentliche Aufgabe des mathematischen Elementarunterrichts die ist, praktische Logik zu lehren, so muß derselbe den Schüler auch zu dem Bewußtsein führen, daß die Haupterfordernisse einer Einteilung oder Aufzählung Ordnung und Vollständigkeit sind, welche beide aus dem Einteilungsprincip nachzuweisen sind. Es kann nicht gestattet sein, daß der Unterricht ohne jede zwingende Not gegen ein so fundamentales und einfaches Gesetz aus Nützlichkeitsgründen verstoße, die der Schüler selbst in keiner Weise zu beurteilen vermag. Besäße der letztere an der betreffenden Stelle des Unterrichts bereits diejenige Reife des Verstandes, welche er durch denselben gewinnen soll, so könnte er sich mit Recht erstaunt zeigen über die unwissenschaftliche Willkür, welche in der Ausschließung jener einen bis dahin den übrigen völlig

gleichberechtigt erscheinenden Art von Winkelpaaren liege, und der Hinweis auf den späteren Nichtgebrauch könnte ihn zu manchen nicht erwünschten Konsequenzen über andere Partien des Unterrichts veranlassen. Das Prinzip, daß jeder Satz nur den Zweck habe, einen oder mehrere spätere beweisen zu helfen, und daß ein solcher nur dadurch berechtigt sei aufgeführt zu werden, daß er diesen Zweck erfülle, ist doch wohl heute nicht mehr das maßgebende der Wissenschaft. Hierzu kommt noch die praktische Erwägung, daß gerade die Vollständigkeit der Ableitung aller Arten aus dem Einteilungsprinzip dazu hilft, das Verständnis und das gedächtnismäßige Behalten zu erleichtern. Selbstverständlich wird es übrigens erlaubt sein, jene vierte Art im Unterrichte als die letzte kürzer zu behandeln wie die übrigen. — Sollen diese Winkel aber in irgend einer Weise erwähnt werden, so scheint es zweckmäßig, dieselben auch zu benennen. Ob für sie etwa der Name konjugierte Winkel oder ein anderer gewählt wird, ist zunächst nicht von Belang.

Wir wollen das Kapitel der Parallelentheorie nicht verlassen, ohne wenigstens zum Schluß auch der Frage nach der Definition paralleler Linien zu gedenken, welche schon zu vielfachen Erörterungen in der Lehrerwelt Anlaß gegeben hat. Die Frage ist, ob man im Anfangsunterricht parallele Linien als solche definieren darf oder soll, welche einander im Unendlichen schneiden, oder ob man sagen darf, dieselben hätten, selbst bei unendlicher Erstreckung, keinen Punkt gemeinsam, wenn man nicht vorzieht, dieselben mit Kunze*) als äquidistante Gerade einer Ebene zu erklären. Es erscheint ganz unzweifelhaft, daß die Einführung des unendlich entfernten Punktes, welcher gleichzeitig nach beiden Richtungen liegt, und doch nur einer ist, im Unterricht der Quarta und Tertia nicht das geringste Verständnis finden, wohl aber dazu beitragen würde, in den Köpfen der Schüler Verwirrung hervorzurufen. Da aber die Fiktion dieses Punktes sich späterhin, insbesondere in der neueren Geometrie als äußerst nützlich erweist und zu keinen Unrichtigkeiten führt, so ist es wünschenswert, daß der Wortlaut der vom Anfänger einzuprägenden Definition der Parallelen nicht einer späteren Übersetzung des einander nicht Schneidens in das im Unendlichen Schneiden geradezu widerspreche. Man hat deshalb vorgeschlagen, der zweiten obigen Wortfassung gleichsam in Parenthese die Worte „im Endlichen" beizufügen. Dieses Auskunftsmittel dürfte aber um deswillen verfehlt sein, weil der Zusatz seine Begründung und damit seinen Gegensatz herausfordert. Es scheint daher richtiger, zu sagen: Parallele Gerade sind solche Linien, welche keinen Punkt mit einander gemeinsam haben, auch wenn man sie „beliebig weit" verlängert denkt. Der unendlich entfernte Punkt ist ja als unerreichbar durch diese Fassung ausgeschlossen.

*) Lehrbuch der Geometrie.

§ 46. Die Kongruenz der Dreiecke.

Es ist wünschenswert, daß die Kongruenzsätze im Unterricht unmittelbar auf einander folgen, daß also der Zusammenhang derselben nicht durch Sätze aus anderen Abschnitten unterbrochen werde, welche diese ihre Stellung nicht auf Grund der genetischen Behandlung, sondern allein deshalb erhalten, weil sie zu dem Beweise des einen oder des anderen Kongruenzsatzes gebraucht werden. Dies ist u. a. dadurch möglich, daß man den Satz „Gleichen Seiten eines Dreiecks liegen gleiche Winkel gegenüber" mit den dazugehörigen der Kongruenzlehre vorausschickt. Zum Beweise desselben wird freilich schon das Aufeinanderlegen zweier Dreiecke zur Deckung derselben benutzt werden, allein dies kann für den einzelnen Fall besonders geschehen, und es ist nicht nötig, dabei von der Kongruenz der Dreiecke zu reden. Ein logischer Fehler liegt ja nicht darin, und man hält es auch an anderen Stellen des Systems für unbedenklich, daß man einen Spezialfall vor dem allgemeinen Satze, welcher denselben umfaßt, besonders beweise, wenn dies irgendwie für den weiteren Aufbau vorteilhaft erscheint. In einem solchen vorhergegangenen Deckungsbeweis an einem einfachen Falle liegt auch zugleich eine Vorübung der Schüler für die kommenden Beweise der Kongruenzsätze. Es erscheint also zweckmäßig, die auf die Parallelentheorie folgende Untersuchung der einfacheren Eigenschaften des Dreiecks etwa wie folgt zu gliedern: a) Von den Winkeln des Dreiecks. Dieser Paragraph, der den Satz von der Winkelsumme und die mit ihm unmittelbar zusammenhängenden, sowie die Einteilung der Dreiecke auf Grund desselben enthält, schließt sich inhaltlich und durch die Beweismittel eng an die Lehre von den Winkeln an Parallellinien an. Die Einteilung der Dreiecke darf dabei nicht als eine willkürliche erscheinen, sondern hat sich auf den Satz zu stützen: Jedes Dreieck hat wenigstens zwei spitze Winkel; der dritte kann spitz, recht oder stumpf sein. Sie kann daher erst nach diesem Satze aufgestellt werden. b) Von den Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines und desselben Dreiecks. Hierher gehört die Einteilung der Dreiecke nach den Seiten, der obige Satz vom gleichschenkeligen Dreieck, seine Umkehrung und die Gegensätze beider nebst den erforderlichen Zusätzen und Anwendungen. Daran können c) die Sätze über die Summe oder Differenz von Seiten eines und desselben Dreiecks nebst den dazugehörigen angeschlossen werden. Nun folgt d) die Vergleichung der Seiten und Winkel zweier oder mehrerer Dreiecke, also die Reihe der Kongruenzsätze, an welche sich e) die unmittelbaren Anwendungen derselben, z. B. auf die Symmetrieachse des gleichschenkeligen Dreiecks u. s. w. und f) die Nichtkongruenzsätze anschließen. Selbstverständlich ist die vorstehende Anordnung nur als ein Vorschlag zu betrachten, welcher geeigneten Abänderungen zugänglich ist.

Es ist ferner wünschenswert, daß die Kongruenzsätze in einer bestimmten geordneten Reihenfolge stehen und später als erster, zweiter u. s. w. Kongruenzsatz kurz citiert werden können. Für diese Reihenfolge empfiehlt sich die folgende: Die Bestimmungsstücke sind 1) eine Seite und zwei homologe Winkel, 2) zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, 3) zwei Seiten und ein (?) gegenüberliegender Winkel, 4) die drei Seiten. Diese Reihenfolge entspricht einerseits der Aufstellungsweise von Kombinationen, läßt also Ordnung und Vollständigkeit leicht erkennen, andererseits fällt sie nahezu mit derjenigen nach der aufsteigenden Schwierigkeit der Beweisführung zusammen. — Eine zweckmäßige Art des Citierens der Kongruenzsätze ist auch die unseres Wissens zuerst von Worpitzky empfohlene mittels der Namen Winkel—Seite—Winkelsätz, Seite—Winkel—Seitensatz u. s. w., oder abgekürzt und namentlich in schriftlichen Arbeiten: 1) wsw (wws), 2) sws, 3) wss, 4) sss.

Schon in den früheren Abschnitten der Geometrie, dann aber namentlich in dem vorstehend behandelten ist auch die Frage nach einer zweckmäßigen Wahl und Ordnung der Buchstaben, überhaupt der Zeichnung und Bezeichnung der Figuren von Bedeutung. Welchen Wert es haben kann, hierbei nach bestimmten Prinzipien zu verfahren, zeigt z. B. die allgemein angenommene Eulersche Bezeichnungsweise der Eckpunkte, Seiten und Winkel eines Dreiecks in der Trigonometrie. Eine Hauptsache ist in allen derartigen Fällen die Gleichmäßigkeit und Konsequenz der gewählten Bezeichnungen unter Anlehnung an das durch allgemeineren Gebrauch schon festgesetzte. Hiernach können etwa folgende Regeln gegeben werden:

In der elementaren Geometrie werden Punkte stets durch große lateinische Buchstaben, Strecken mit Rücksicht auf ihre Lage durch ihre Endpunkte, mit Rücksicht auf ihre Länge (Maßzahlen) durch kleine lateinische, Winkel durch kleine griechische Buchstaben oder mittels dreier Punkte, zuweilen auch durch Einschließen der für ihre Schenkel gewählten Bezeichnungen in eine Klammer, unter Vorsetzung des Zeichens $\angle$ oder $\sphericalangle$ bezeichnet, z. B. $\angle(a, b)$.

In betreff der Wahl der verschiedenen Buchstaben für die Punkte, Strecken oder Winkel einer Figur gilt im allgemeinen die alphabetische Reihenfolge. Bei häuslichen Arbeiten der Schüler die Wahl der Buchstaben ganz frei zu geben, oder nach einem Vorschlage, welcher die Absicht verfolgt, die Unselbständigkeit bei der Anfertigung der Arbeiten zu erschweren, gar jedem einzelnen eine besondere Reihenfolge, etwa diejenige der Buchstaben seines Vor- oder Zunamens, zur Pflicht zu machen, ist nicht ratsam und sichert keineswegs den gewünschten Erfolg. Die Buchstaben sollen vielmehr durch eine ihrem allmählichen Auftreten im Verlaufe der Beweisführung oder Konstruktion entsprechende alphabetische Reihenfolge zugleich den Gang der Arbeit mit angeben. Daß man bei einander entsprechenden Gebilden auch entsprechende

Buchstaben mit verschiedenen Indices mit Vorteil anwendet, z. B. A und A_1 (lies A-Eins) oder A' (lies A-Strich), ist bekannt. — Ein einzelnes Dreieck mit seinen Seiten und Winkeln wird stets nach Euler bezeichnet, sodaß also die gegenseitige Lage der Stücke (z. B. α an A, gegenüber a) schon durch die Wahl der Buchstaben gekennzeichnet ist. Dabei empfiehlt es sich, wenn auch die Lage des Dreiecks in Betracht kommt, eine Grundseite und die ihr gegenüberliegende Spitze immer in gleichmäßiger Weise, etwa jene mit AB (A rechts, B links, sodaß a links, b rechts liegt und im allgemeinen $a > b$ gedacht wird), diese mit C zu bezeichnen.

Im übrigen muß für den Anfangsunterricht entschieden davor gewarnt werden, den Beweis eines Lehrsatzes oder die Ausführung einer Konstruktion immer nur an einer und derselben Figur von bestimmter Gestalt, Größe und Lage zu machen, vielmehr empfiehlt es sich, bei den Wiederholungen auch einmal die Buchstaben zu wechseln, die Figur in einer anderen Stellung zu zeichnen u. dgl. m., damit die Schüler lernen, vom Unwesentlichen und Nebensächlichen abzusehen, und an mehr oder minder mechanischem Einlernen gehindert werden. Man vergleiche die betreffende Ausführung im § 11.

Man vermeide ferner solche Figuren, welche besondere, einfache Fälle darstellen, wenn eine allgemeinere Wahrheit entwickelt werden soll, so z. B. bei Sätzen über die Eigenschaften beliebiger Dreiecke die Zeichnung von gleichseitigen, gleichschenkeligen oder rechtwinkeligen, denn die Schüler sind im Anfange nur zu sehr geneigt, die Ergebnisse ihrer Anschauung an der zufälligen Figur für allgemein giltig anzusprechen.

Späterhin ist es sehr zweckmäßig, wie für die Seiten und Winkel eines Dreiecks, so auch für die übrigen Bestimmungsstücke desselben ständige Bezeichnungsweisen anzuwenden, wie sie ja auch neuerdings mehr und mehr in allgemeinen Gebrauch kommen. Man wird also z. B. die Höhe mit h, verschiedene Höhen desselben Dreiecks mit h_a, h_b, h_c je nach der zugehörigen Grundseite, den Radius des umbeschriebenen Kreises mit r, die Radien der Berührungskreise bezüglich mit ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c, die winkelhalbierenden Transversalen mit w_a, w_b, w_c, die Mittellinien mit m_a, m_b, m_c bezeichnen, u. dgl. m.

§ 47. Die Konstruktionsaufgaben.

An die Kongruenzlehre und die Sätze über die Symmetrieachse des gleichschenkeligen Dreiecks schließen sich als nächstliegende Anwendungen die ersten Fundamentalaufgaben der Konstruktion an. Als solche bezeichnen wir diejenigen, welche die immer wiederkehrenden Grundlagen für alle zusammengesetzteren Aufgaben bilden, wie das Halbieren von Strecken und Winkeln, das Errichten und Fällen von Senkrechten, das Anlegen gegebener Winkel und das Ziehen von Paral-

lelen, ferner die den einzelnen Kongruenzsätzen entsprechenden Dreieckskonstruktionen. Diese letzteren ergänzen zugleich das Verständnis jener Sätze und können selbst, wie bekannt, zum Beweise derselben benutzt werden.

Diese Fundamentalaufgaben sind ihrer besonderen Wichtigkeit wegen in das System einzureihen, und die praktische Ausführung ihrer Auflösungen muß bis zur Sicherheit und Fertigkeit gebracht werden. Nach dieser Seite vermag ein vorausgegangener propädeutischer Unterricht eine sehr schätzenswerte Unterstützung zu leisten. Damit auch die Begründung und die Form der Darstellung (Konstruktion, Beweis) sich gehörig einpräge, hat der Verf. die schriftliche Ausarbeitung dieser Aufgaben, wenigstens des größeren Teils derselben, zum Gegenstand der regelmäßig wiederkehrenden häuslichen Heftarbeiten in der Quarta gemacht. Dieselben wechseln hier mit Rechenaufgaben ab und werden nicht bloß ihrem Inhalte, sondern auch der Darstellungsweise nach vorher vollständig in einer Unterrichtsstunde durchgenommen, sodaß die Schüler nur eine schriftliche Wiederholung auszuführen haben. Mehr als dies kann auf dieser Stufe vorerst nicht verlangt werden.

Die regelmäßigen Übungen in der mehr oder minder selbständigen Auflösung auch anderer Konstruktionsaufgaben schließen sich in ihren Anfängen inhaltlich ebenfalls an den durch die Kongruenzsätze beherrschten Abschnitt der Theorie an, doch wird mit denselben noch nicht in Quarta begonnen werden können. Sie erfordern bereits die Beherrschung des vollendeten Pensums dieser Klasse und müssen deshalb für die Untertertia vorbehalten werden. Auch in dieser letzteren Klasse wird man sich noch auf die leichteren Aufgaben nach den (im nachstehenden näher zu besprechenden) Methoden der geometrischen Örter und der Hilfsfiguren beschränken und auf eine Determination im allgemeinen verzichten müssen. Die Auflösungen werden hier also in der Regel aus Analysis, Konstruktion und Beweis mit den nötigen Figuren bestehen.

An **Hilfsmitteln** für die geometrischen Konstruktionen überhaupt hat unsere Schullitteratur gegenwärtig keinen Mangel. Die verbreitetsten Aufgabensammlungen für dieses Gebiet sind wohl die folgenden:

1. Gandtner und Junghans, Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Planimetrie. Berlin, Weidmann. Zwei Teile.

Der erste Teil enthält die ohne, der zweite die mit Kenntnis der Proportionen zugänglichen Aufgaben. Das Buch ist sehr umfangreich und außerordentlich reichhaltig. Die Aufgaben sind nicht nach Methoden, sondern nach den benutzten Lehrsätzen und nach auf den Inhalt bezüglichen Gruppen geordnet. Die Anleitung zur Behandlung geschieht bei den einzelnen schwierigeren Aufgaben durch Verweisung auf vorhergegangene Daten, Örter und Aufgaben.

2. Lieber und v. Lühmann, Geometrische Konstruktionsaufgaben. Berlin, Simion.

Ebenfalls sehr reichhaltig. Die Aufgaben sind nach Gruppen geordnet, und für diese Gruppen sind die gemeinsamen Grundzüge der Auflösung als Anleitung angegeben.

Außerdem werden viel gebraucht und gut empfohlen u. a.:

3. Hoffmann, Sammlung planimetrischer Aufgaben. Paderborn, Schöningh.

4. Wöckel, Geometrie der Alten in einer Sammlung von (850) Aufgaben, herausgegeben von Schröder. Nürnberg, Korn.

5. Heilermann, Sammlung geometrischer Aufgaben. Essen, Bädeker.

Auch auf diesem Gebiete genügt in der Schule nicht das bloße Stellen von Aufgaben und die etwaige Zugabe von Andeutungen über die Auflösung der einzelnen, vielmehr müssen, wie auf S. 95 erörtert worden, den Schülern bestimmte Methoden gelehrt werden. Ein nach dieser letzteren Richtung besonders für den Lehrer sehr anregendes, vielseitiges Schriftchen ist

6. Petersen, Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Aufgaben, übersetzt von v. Fischer-Benzon. Kopenhagen, Host und Sohn.

Dasselbe enthält eine nicht geringe Anzahl von Methoden, welche zum Teil zum erstenmal als solche aufgestellt sind und bis zu recht schwierigen Problemen führen. Dagegen ist die Anzahl der beigefügten einzelnen Übungsaufgaben verhältnismäßig nur klein.

Als ein für Schulzwecke geeignetes Buch, welches eine dafür ausreichende Aufgabensammlung enthält und nach Methoden geordnet ist, die unter Beschränkung ihrer Anzahl mit ausgeführten Erläuterungen versehen sind, glaubt der Verf. auch das von ihm selbst herausgegebene:

7. Reidt, Planimetrische Aufgaben, 2. Teil. Breslau, Trewendt

nennen zu dürfen.

Über den Wert der Konstruktionsaufgaben für den Unterricht sind sehr verschiedene Ansichten laut geworden, von äußerst geringschätzigen bis zu überschwenglichen, welche in denselben das eigentliche Ziel des ganzen planimetrischen Unterrichts erblicken. Die Wahrheit dürfte auch hier in der Mitte liegen. Die Konstruktionsaufgaben haben einen hohen Wert für den Unterricht, nicht bloß weil sie, wie aller Übungsstoff, zur Erläuterung und Einprägung des sonst Gelernten dienen, sondern auch weil sie ganz besonders geeignet sind, zu selbständiger Thätigkeit anzuregen und außerdem zu zeigen, wie ein gestelltes Problem in wissenschaftlichem Sinne und erschöpfend behandelt werden kann. Jede Ausdehnung der Übungen im Konstruieren aber, welche über das hierdurch gesteckte Ziel hinausgeht, und die von den Schülern den Besitz einer besonderen Findigkeit und einen Zeitverbrauch verlangt, welcher der dadurch erreichten allgemeinen Förderung nicht entspricht, ist gänzlich zu verwerfen. Daher sollen die Methoden, die zur Anleitung der Schüler in der Behandlung der Aufgaben gelehrt werden müssen, möglichst einfach und nicht zu zahlreich sein. Solche Methoden, welche komplizierte Hilfsmittel erfordern, den Anschauungskreisen der Schüler fern liegen und zu ihrer Erlernung einen Aufwand von Zeit

und Kraft verlangen, der in keinem Verhältnis zu dem durch dieselben zu bewältigenden Gebiete steht, werden im allgemeinen auszuschließen sein.

Einige ältere Lehrbücher und Sammlungen (zum Teil auch die neueren) führen unter den Methoden die Analysis durch Reduktion, durch Data, durch Lehrsätze und durch Analogie an. Wir können in denselben keine Methoden im engeren Sinne, wie sie von uns verlangt werden, erblicken. Die Reduktion einer neu gestellten Aufgabe auf eine schon früher gelöste ist ein allgemeines Verfahren, welches fast überall angewendet wird, denn schließlich wird jede Aufgabe auf eine oder mehrere andere zurückgeführt. Eine Anleitung, in welcher Weise die Reduktion vorgenommen werden könne, also wie die Aufgabe anzugreifen sei, wird aber dadurch nicht gegeben. Ähnliches gilt über die Analysis durch Data. Ein Datum ist das Ergebnis eines Lehrsatzes, welcher zeigt, wie man aus gewissen gegebenen Größen andere, von ihnen abhängige finden, also eine Aufgabe lösen kann. Daß man dann die abgeleiteten Größen zur weiteren Untersuchung als bekannte benutzen kann, ist ebenfalls eine allgemeine Richtschnur, aber keine spezielle Methode. Auch die Analysis durch Lehrsätze kann nur insoweit eine selbständige Bedeutung beanspruchen, als es Aufgaben giebt, deren Auflösung unmittelbar aus einem bekannten Lehrsatze, ohne Zwischenglieder hervorgeht, wie z. B. die Aufgabe, an einen gegebenen Kreis die Tangente zu konstruieren, welche denselben in einem gegebenen Punkte berührt, aus dem Lehrsatze, daß die Tangente senkrecht zu dem durch den Berührungspunkt gehenden Radius steht. In solchen Fällen kann aber von einem Aufsuchen der Auflösung gar keine Rede sein, dieselbe ist vielmehr durch den Lehrsatz gegeben; eine Analysis kann also höchstens der Form, nicht aber dem Wesen nach aufgestellt werden. Daher gehören auch derartige Konstruktionsaufgaben als Übungsmaterial zu demjenigen Teile, welcher den einzelnen Lehrsätzen oder kleineren Abschnitten des Systems behufs unmittelbarer Anwendung anzuschließen ist, wie dies z. B. von dem Verf. im ersten Teile seiner vorher genannten „Planimetrischen Aufgaben" ausgeführt worden. Auch die Analogie verschiedener Aufgaben kann wohl Winke für die Auflösung einzelner, aber keine Methode im eigentlichen Sinne geben.

Die eigentliche Grundlage aller hierher gehörigen Methoden bietet nur die Bestimmung gesuchter Punkte durch je zwei geometrische Örter. Bei jeder Aufgabe, mag dieselbe die Konstruktion von Strecken, Winkeln oder Dreiecken, Kreisen und anderen Figuren fordern, handelt es sich schließlich um die Ermittelung der Lagen eines oder mehrerer Punkte, und diese erfolgt mittels des Durchschnittes zweier Linien, also in den Elementen mittels zweier Geraden oder Kreisbogen. So kommt jede Konstruktion eines Dreiecks auf die Festlegung seiner drei Eckpunkte, insbesondere nach erfolgter Zeichnung einer Seite auf die Bestimmung des dritten Eckpunktes, jede Konstruktion eines Kreises auf

die Bestimmung seines Mittelpunktes und — für den Radius — diejenige eines Punktes des Kreises selbst hinaus. Es giebt jedoch eine Anzahl von Operationen dieser Art, welche so einfach und naheliegend sind und so häufig gebraucht werden, daß man dieselben zu den Fundamentalaufgaben rechnen wird, deren Kenntnis überall vorausgesetzt werden muß, und bei denen man daher auch nicht von der Notwendigkeit einer Ermittelung geometrischer Örter reden kann. Hierher gehört jede Bestimmung eines Punktes mittels einer gegebenen Geraden und eines durch seinen Mittelpunkt und seinen Radius gegebenen Kreises, also das Abtragen einer Strecke von gegebener Länge auf einer vorhandenen Geraden und die Bestimmung desjenigen Punktes einer geraden Linie, der von einem bekannten Punkte eine vorgeschriebene Entfernung hat. Derartige Fälle, wie sie ja schon bei den grundlegenden Dreieckskonstruktionen im Anschluß an die Kongruenzsätze vorkommen, betrachten wir nicht als zu einer bestimmten Methode gehörig, sondern als eine allgemeine Grundlage aller Konstruktionen, und wir verstehen unter der Methode der geometrischen Örter im engeren Sinne diejenige, bei welcher Punkte durch geometrische Örter bestimmt werden, die erst aus den Bedingungen der Aufgabe ermittelt werden, also nicht unmittelbar einleuchtende Anwendungen jener Fundamentalaufgaben sind. Das Verfahren hierbei besteht darin, daß man die im einzelnen Fall gestellte bestimmte Aufgabe durch Weglassen einer Forderung derselben in eine unbestimmte verwandelt, welche auf einen geometrischen Ort führt, dann in gleicher Weise, aber mittels einer anderen Weglassung, einen zweiten Ort für denselben gesuchten Punkt ermittelt, und so den letzteren als einen solchen findet, welcher beiden Örtern gemeinsam ist. Auf diesem Wege läßt sich eine große Anzahl von Aufgaben lösen, von denen manche bereits für die Untertertia leicht genug sind.

Besonders wichtig sind ferner diejenigen Aufgaben, welche die Konstruktion eines Dreiecks (oder späterhin einer anderen Figur) aus Bestimmungsstücken verlangen, die nicht sämtlich Seiten oder Winkel desselben sind, unter denen also beispielsweise Summen oder Differenzen von Seiten, die Längen von Höhen oder anderen begrenzten Transversalen, die Radien von Berührungskreisen u. dgl. m. vorkommen. Diese Aufgaben bilden ein unerschöpfliches Übungsgebiet von den leichtesten bis zu den schwierigsten Fällen, sie ergänzen ferner die Kongruenzlehre und liefern endlich eine ausgezeichnete Vorübung zu den später vorkommenden entsprechenden Berechnungsaufgaben der Trigonometrie. Für ihre Auflösung leistet namentlich die Methode der Hilfsfiguren Dienste, welche darin besteht, daß man die gegebenen Bestimmungsstücke oder einen Teil derselben in ein Dreieck oder eine andere Hilfsfigur bringt, die aus denselben mittels einer Fundamentalaufgabe konstruiert werden kann und dann in leicht ersichtlicher Weise auf die gesuchte Figur führt.

Die nähere Erläuterung dieser und der anderen später noch anzuwendenden Methoden erscheint an dieser Stelle als entbehrlich, weil in betreff derselben auf die vorher unter 6. und 7. genannten Schriften verwiesen werden kann. Über die Einfügung der Konstruktionsaufgaben in den Unterricht vergleiche man § 24. Damit dieselben in lebendige Wechselwirkung mit dem System treten, ist es zweckmäßig, nach jedem Paragraphen des letzteren und nach der Behandlung der jedesmal zur besonderen Einübung der Sätze desselben dienenden unmittelbaren Aufgaben, wie z. B. der Übungslehrsätze und der Rechnungsaufgaben, auch einige Stunden auf die allgemeineren Konstruktionen zu verwenden. Diese letzteren sind hiernach nicht in ununterbrochenem Zusammenhange zu behandeln, sodaß sie sämtlich, oder doch die einzelnen Methoden an derselben Stelle ein für allemal zum Abschluß gebracht werden, sondern sie sind auf die einzelnen kleineren Abschnitte des Systems zu verteilen, sodaß sie sich dem Inhalte der letzteren thunlichst anschließen und in allmählichem Fortschritt aufs neue geübt und erweitert werden. Eine derartige Verteilung ist z. B. in des Verf. „Elemente der Mathematik" versucht worden.

So schließen sich also an die Kongruenzlehre in Untertertia die leichteren der oben genannten Dreieckskonstruktionen aus mittelbaren Bestimmungsstücken, an die dann folgenden Paragraphen über das Parallelogramm und das Trapez die entsprechenden Vierecksaufgaben, an die Sätze von den Tangenten eines Kreises oder von der Berührung zweier Kreise die durch die Methode der geometrischen Örter zu lösenden Aufgaben über Kreise, welche gegebene Gerade oder gegebene Kreise berühren, durch gegebene Punkte gehen, u. dgl. m. an. Die beiden oben genannten Methoden bieten hiernach hinreichenden Stoff für alle Abschnitte bis zur Proportionalität der Strecken; eine Vermehrung derselben ist nicht nötig.

Die Ähnlichkeit der Dreiecke führt dann später auf die Methode der ähnlichen Figuren: Bestimmen nach Weglassung einer Strecke die übrigen gegebenen Stücke die Gestalt der gesuchten Figur, so läßt sich mittels eines beliebig angenommenen geeigneten anderen Stückes eine der letzteren ähnliche und zu dieser dann mittels der vorher weggelassenen Strecke die gesuchte konstruieren. Auch diese Methode bietet in Verbindung mit den früheren reichhaltigen Übungsstoff. An sie schließt sich nach den Sätzen über die metrischen Relationen bei dem rechtwinkeligen Dreieck u. s. w. diejenige der algebraischen Analysis an. Neben der Übung eines neu auftretenden Verfahrens wird die der früheren fortgesetzt, durch Anwendung der neuen Lehren erweitert und später in Verbindung mit den neuen Methoden gebracht, sodaß durch die Vereinigung derselben auch eine gemischte Analysis entstehen kann. Auf diese Weise erhält man einen geregelten Fortschritt, in welchem jede höhere Stufe nicht bloß durch die unmittelbare Anwendung des im System Gelernten geübt und belebt, sondern auch die einzelnen

mit einander verbunden und ununterbrochen im Bewußtsein erhalten werden.

Indem wir für eine nähere Erläuterung der vorstehenden, unseres Erachtens für den Unterricht ausreichenden Methoden wiederholt auf die Ausführung derselben in des Verfassers „Planimetrischen Aufgaben" verweisen, bemerken wir, daß das viel weiter gehende und erschöpfendere Schriftchen von Petersen den Stoff in folgender Weise gliedert: Das erste Kapitel behandelt die geometrischen Örter und unterscheidet solche für Punkte und für Linien. Bei den ersteren wird eine Reihe von Methoden unter den Namen Multiplikation von Kurven, Ähnlichkeitsmethode, inverse Figuren und geometrische Örter im allgemeinen behandelt. Das zweite Kapitel bespricht die auf Umformung der Figur beruhenden Methoden der Parallelverschiebung und der Umlegung, das dritte enthält die Drehungstheorie. Wir empfehlen das lehrreiche Büchlein allen Lesern zum Studium.

§ 48. Die Vierecke.

Das Kapitel von den Seiten und Winkeln der Vierecke, in welchem besonders das Parallelogramm behandelt wird, bietet wiederholt Gelegenheit zur Übung im richtigen Einteilen. Zunächst werden die vier Seiten als zwei Paare von Gegenseiten zusammengefaßt: entweder nimmt man beide Paare als parallel an, oder nur eines, oder keins; ein vierter Fall ist nicht möglich. Die hierauf sich stützenden Erklärungen hindern nicht, z. B. in Aufgaben und bei stetigem Übergang von der einen Figurenart zur anderen, das Parallelogramm als besonderen Fall des Trapezes und dieses als besonderen des Trapezoids zu betrachten. — Die Benennung Paralleltrapez halten wir für unnütz weitläufig und für antiquiert.

Die Voraussetzung des Parallelismus der Seiten führt zuerst auf die Untersuchung der Eigenschaften der **Winkel** des Parallelogramms. Die betreffenden Sätze und ihre Umkehrungen sind ohne Anwendung einer Diagonale zu beweisen. Vgl. § 13, S. 43. Sie führen darauf, daß entweder alle Winkel rechte oder alle schiefe sind, wodurch die betreffende Unterscheidung der Parallelogramme begründet wird, die also nicht schon vorher aufgestellt werden darf. Die Aufgabe, auch die Beziehungen zwischen den Seiten zu untersuchen, führt auf die Anwendung einer Diagonale und im Verlauf der betreffenden Sätze auf die Unterscheidung von Parallelogrammen, in welchen die Seiten des einen Paares denen des andern gleich oder nicht gleich sind. Erst jetzt können durch Verbindung der beiden Einteilungen die vier Einzelarten aufgestellt und definiert werden.

Die Benennungen rechtwinkeliges und schiefwinkeliges, gleichseitiges und ungleichseitiges Parallelogramm sind weitläufig, doch ist es zweckmäßig, z. B. Rechteck und Quadrat unter einen gemeinsamen Begriff

zu subsumieren, ohne zugleich die Unterscheidung derselben aufzuheben. Denn ergiebt z. B. die Auflösung einer Aufgabe, welche die Konstruktion eines Rechtecks verlangte, in einem besonderen Falle ein Quadrat, so kann die Auflösung für diesen Fall im allgemeinen nicht als unmöglich, sondern sie muß im Gegenteil für vereinfacht erklärt werden. Es zeigt sich hierdurch, daß die Fassung der Aufgabe zu eng war, indem durch das Wort Rechteck die nicht notwendige Forderung ungleicher Seiten des gesuchten Parallelogramms in dieselbe aufgenommen worden. Statt dieses Wortes hätte also rechtwinkeliges Parallelogramm gesagt sein sollen, allein die Weitläufigkeit dieser Bezeichnung hat vielfach dazu geführt, dieselbe durch Rechteck zu ersetzen und das Quadrat als besonderen Fall des letzteren anzusehen. Daß dies mit der Schärfe der ursprünglichen Begriffsbestimmungen nicht streng vereinbar ist, liegt auf der Hand, dennoch geht es nicht an, statt rechtwinkeliges Parallelogramm Rechteck und ebenso statt gleichseitiges Rhombus zu sagen, weil es an anderen Stellen nötig ist, das ungleichseitig-rechtwinkelige und das gleichseitig-schiefwinkelige Parallelogramm vom Quadrat durch eine kurze Benennung zu unterscheiden. Hier würde also eine Vereinbarung über neue Namen wünschenswert sein, und wir würden vorschlagen, hierzu den Umstand zu benutzen, daß wir die Doppelbenennungen Rechteck—Oblongum und Rhombus—Raute bereits in der Sprache besitzen und also etwa, wie folgt, zu benennen:

A. Rechtwinkeliges Parallelogramm = Rechteck,
   a) dasselbe ist ungleichseitig: Oblongum,
   b) dasselbe ist gleichseitig: Quadrat.

B. Gleichseitiges Parallelogramm = Rhombus,
   a) dasselbe ist schiefwinkelig: Raute,
   b) dasselbe ist rechtwinkelig: Quadrat.

Wir würden dies als alle Schwierigkeiten beseitigend vorschlagen — wenn wir hoffen könnten, dafür allgemeine Zustimmung zu finden. —

Auf die Sätze über die Seiten können dann noch solche über die Diagonalen der Parallelogramme überhaupt und der einzelnen Arten, sowie über die Kongruenz von Parallelogrammen folgen.

Bei dem Trapez ist die Behandlung einiger der wichtigsten Sätze über das gleichschenkelige oder das Antiparallelogramm deshalb wünschenswert, weil dasselbe sehr dankbare Gelegenheit zu einfachen Übungsaufgaben bietet. Für das allgemeine Trapez sind besonders die später mehrfach zu gebrauchenden Sätze über die Mittellinie wichtig.

Das allgemeine Viereck wird in der Regel keiner besonderen Behandlung unterworfen werden, da es keine nennenswerte Ausbeute liefert. Es kann jedoch zu Konstruktionsaufgaben benutzt werden, die freilich entweder unmittelbar auf Dreieckskonstruktionen zurückführen oder im andern Fall meist eine Arbeit nötig machen, deren Weitläufigkeit nicht in rechtem Verhältnis zu dem erzielten Gewinne steht. Auch

die Lehre von der Kongruenz der Vierecke und der Polygone wird in der Regel keine eingehende Behandlung finden, doch ist es des späteren Gebrauches wegen wünschenswert, daß mindestens gezeigt werde, wie zur Bestimmung eines Vierecks fünf und überhaupt eines n-Ecks $2n - 3$ Stücke im allgemeinen erforderlich sind.

§ 49. Vom Kreise.

Auf die im vorigen besprochenen Gebiete läßt man jetzt meist die einfacheren Sätze vom Kreise folgen, sodaß die Planimetrie in zwei Teile geschieden wird, die durch die Anwendung des Begriffs der Proportion auseinander gehalten werden. Das hiernach zunächst zu behandelnde Kapitel vom Kreise kann, wie folgt, genetisch gegliedert werden: nach denjenigen Sätzen, welche unmittelbare Folgerungen aus der Definition des Kreises (und daher meist wohl schon in der Einleitung zur Planimetrie behandelt) sind, und den Sätzen über die Gleichheit der Radien und Durchmesser u. s. w., folgt die Untersuchung der Lagen- bezw. Größenbeziehungen zwischen einem Kreise und a) einem Punkte, b) einer oder mehreren Geraden (Tangenten und Sehnen), c) einem Winkel (Centri- und Peripheriewinkel), d) einer Figur (ein- und umbeschriebene Figuren, regelmäßige Figuren), e) einem anderen Kreise (Berührung von Kreisen).

Zu a) ist der Satz, daß ein Punkt außerhalb eines Kreises, auf demselben oder innerhalb desselben liegt, je nachdem sein Abstand vom Mittelpunkte größer, ebenso groß oder kleiner als der Radius ist, nicht als zu einfach und selbstverständlich bei Seite zu lassen, sondern vielmehr besonders hervorzuheben, denn er enthält die Anleitung zu den Beweisen vieler späteren Behauptungen, die hierdurch gleichsam geregelt werden. Hierher gehören zunächst die Beweise der Kongruenz von Kreisen oder von Teilen eines solchen durch Deckung, sodann die Untersuchungen über die Anzahl der Punkte, welche eine Gerade mit einem Kreise gemeinsam hat, also z. B. der Fundamentalsatz über Tangenten, u. a. m.

Zu bemerken ist noch, daß unter einem Kreise immer nur die Linie, nicht die Kreisfläche zu verstehen ist. Dies wird durch die Übereinstimmung mit den Benennungen anderer Kurven notwendig; man dürfte z. B. später nicht sagen, der Kreis sei ein besonderer Fall der Ellipse, wenn diese mit der Hyperbel und der Parabel als Linie definiert worden ist. Das Wort Peripherie oder Umfang des Kreises enthält stets die Beziehung auf die Länge desselben und ist dementsprechend zu gebrauchen.

Der Abschnitt b) — Kreis und Gerade — führt bei den Beziehungen der Sehnen zum Mittelpunkte auf die Symmetrieachse des gleichschenkeligen Dreiecks zurück und bringt die betreffenden Sätze zur Wiederholung und Anwendung. Hier bietet sich eine hübsche Gelegen-

heit zur Übung in der Aufstellung neuer Sätze: Die betreffende Gerade hat eine ganze Reihe von Eigenschaften, sie geht durch den Mittelpunkt, halbiert zwei Centriwinkel, steht senkrecht zur Sehne und halbiert dieselbe, endlich halbiert sie zwei Bogen. Sind zwei diese Gerade bestimmende Punkte oder ein Punkt und die Richtung vorausgesetzt, so lassen sich daraus jedesmal die übrigen Eigenschaften als Folgerungen ableiten; die zahlreichen möglichen Kombinationen zu zweien behufs Bildung der Voraussetzung führen auf eine Reihe von Übungssätzen.

Der Satz, daß gleiche Sehnen gleichweit vom Mittelpunkte abstehen und seine Umkehrung werden wohl meist durch kongruente Dreiecke bewiesen, die entsprechenden Sätze über ungleiche Sehnen finden sich dagegen sehr verschieden behandelt. Für alle vier Sätze läßt sich der Pythagoreische Lehrsatz anwenden, aber dies bedingt, daß diese Sätze vom Kreise ihre Stellung nach demselben erhalten, also erst behandelt werden können, nachdem andere und schwierigere Abschnitte vorausgegangen sind. Am sachentsprechendsten möchte es sein, die Sätze über gleiche Sehnen durch Kongruenz, die über ungleiche Sehnen durch Nichtkongruenz von Dreiecken zu beweisen. Man konstruiert in allen vier Fällen auf gleiche Weise ein Paar rechtwinkeliger Dreiecke, welche in den Hypotenusen übereinstimmen; die betreffenden Hilfssätze besagen, daß in diesem Falle bei Gleichheit eines Kathetenpaares auch die beiden anderen Katheten gleich sind, dagegen zu einer größeren Kathete des einen Paares eine kleinere des anderen gehört. So werden die vier gleichartigen Sätze sämtlich durch gleichartige Mittel bewiesen, und alle künstlichen Beweise, z. B. solche, welche nur dann gelten, wenn die beiden Sehnen einen Endpunkt gemeinsam haben, sind vermieden. — An diese Sätze läßt sich dann der Übergang von einer Sekante durch stetige Vergrößerung ihres Abstandes vom Mittelpunkte zu einer Tangente anschließen.

Bei dem Abschnitte c) — Kreis und Winkel — wird der Hauptsatz von den Peripheriewinkeln und dem auf demselben Bogen stehenden Centriwinkel häufig für drei Fälle einzeln bewiesen, der vierte aber, in welchem der eine Schenkel des Peripheriewinkels eine Tangente ist, als besonderer Satz aufgestellt. Auch wird wohl für Peripheriewinkel der letzteren Art ein besonderer Name, z. B. Tangentenwinkel, gebraucht. Daß der vierte Fall, ebenso wie die drei vorhergehenden, eigens bewiesen werden muß, ist richtig; doch wird es passend sein, daß mindestens gezeigt werde, wie derselbe als Lehrsatz dem oben genannten allgemeinen untergeordnet werden kann.

Zu dem Abschnitte d) — Kreis und Figuren — bemerken wir, daß die noch hier und da gebrauchte Bezeichnung umschriebener Kreis oder umschriebene Figur sprachlich nicht haltbar ist. Niemand dürfte die entsprechende Bezeichnung einschriebener Kreis u. s. w. gebrauchen wollen. Man sagt deshalb vielfach umgeschrieben und eingeschrieben. Verf. hält umbeschrieben und einbeschrieben für besser; man sagt doch

„ich beschreibe einen Kreis“, nicht ich schreibe denselben, also wird auch der Kreis um die Figur beschrieben, nicht geschrieben werden müssen. Das einbeschriebene Viereck wird passend auch Sehnenviereck, das umbeschriebene Tangentenviereck genannt. Unter Kreisviereck kann man ein solches verstehen, welchem sowohl ein Kreis um-, als auch ein anderer einbeschrieben werden kann.

§ 50. Messen und Ähnlichkeit.

Der zweite Hauptteil der Planimetrie, welcher den Begriff der Proportion voraussetzt, muß mit dem Messen von Strecken und namentlich der Erläuterung des Begriffs und der Ermittelung des Verhältnisses von Strecken beginnen. Eine didaktische Schwierigkeit entsteht hier durch die inkommensurabelen Linien. Das Aufsuchen des größten gemeinschaftlichen Maßes mittels successiven Abtragens der Reste, behufs Bestimmung des Verhältnisses von Strecken setzt voraus, daß man schließlich auf einen Rest gelange, welcher ein aliquoter Teil des vorhergehenden sei. Daß dies immer möglich, ist nicht erwiesen, aber auch das Gegenteil bedarf des Nachweises. Für diesen letzteren genügt jeder bestimmte einzelne Fall, und es eignet sich dazu vortrefflich der bekannte Beweis für die Hypotenuse und die Kathete eines rechtwinkelig-gleichschenkeligen Dreiecks. (Vgl. u. a. des Verf. Elemente der Mathematik, Teil 2, § 26, Aufg. 3.) Man kann nun die Länge der Kathete auf der Hypotenuse abtragen und also zeigen, daß man hierdurch einen Punkt der letzteren erhält, welcher niemals bei der Teilung derselben in eine (endliche) Anzahl gleicher Teile als Teilpunkt auftreten kann. Um nun den Begriff des Verhältnisses zweier solchen inkommensurabelen Strecken zu erklären, wird die Anwendung des Grenzbegriffs nötig werden. Ihre völlige Klarstellung erhält die Sache durch die Heranziehung des arithmetischen Begriffs der Irrationalzahlen. (Vgl. § 30.) Können die betreffenden Abschnitte beider Unterrichtsdisciplinen nicht gleichzeitig behandelt werden, so hat jedenfalls der zuerst vorkommende dem nachfolgenden zur Erläuterung zu dienen.

Manche helfen sich damit, daß sie die Möglichkeit inkommensurabeler Strecken ganz ignorieren; das ist sehr bequem, aber gewiß nicht wissenschaftlich. Hat man notwendig die betreffenden Sätze mit Schülerjahrgängen durchzunehmen, denen das Verständnis irrationaler Verhältnisse noch nicht klar gemacht werden kann, so mag es immerhin gestattet sein, diese Sätze vorerst unter der Voraussetzung von nur rationalen Verhältniszahlen zu beweisen; die Lücke muß dann aber später ausgefüllt werden. — Andere begnügen sich, die inkommensurabelen Strecken kurz als solche zu bezeichnen, welche ein unendlich kleines gemeinschaftliches Maß haben, und sie auf Grund dessen weiterhin als kommensurabele zu behandeln. Daß auch hiermit die Schwierigkeit nur umgangen wird, bedarf keines Nachweises. Wissenschaftlich streng

sind gewisse indirekte Beweise. Die Anwendung derselben muß im einzelnen Falle das Lehrbuch zeigen (z. B. Reidt, Planimetrie S. 83, S. 104). — Den Hinweis darauf, daß bei der praktischen Ausführung des obigen Restverfahrens (aber nicht bei dem Denkprocesse) die Linienreste sehr bald der Wahrnehmung entschwinden, und eine hierauf gegründete Verurteilung der begrifflichen Unterscheidung des inkommensurabelen Verhältnisses in der Geometrie sollte man bei einem Mathematiker für unmöglich halten.

In betreff der Ähnlichkeitssätze ist, wie bei den Kongruenzsätzen, eine bestimmt geordnete Reihenfolge wünschenswert, und dieselbe sollte der Ordnung der letzteren genau entsprechen. Es sollen ferner die Beweise der Ähnlichkeitssätze nicht willkürlich angeordnet, sondern durchaus gleichmäßig sein. Man kann etwa, wie folgt, verfahren:

Nachdem der Satz vorausgeschickt ist, daß jede zu einer Seite parallele Transversale eines Dreiecks von diesem ein ihm ähnliches abschneidet, wird zum weiteren Beweise der Ähnlichkeit zweier Dreiecke ABC und $A'B'C'$ jedesmal $AD = A'B'$ von AB abgetragen und DE parallel zu BC gezogen. Aus dem eben genannten Satze folgt dann die Ähnlichkeit der Dreiecke ADE und ABC, und es erübrigt nur noch, die Kongruenz der Dreiecke ADE und $A'B'C'$ nachzuweisen. Hierzu ist wieder in jedem Falle $AD = A'B'$ gegeben; die beiden noch fehlenden Stücke müssen sich aus den beiden Voraussetzungen des betreffenden Ähnlichkeitssatzes ergeben. — Hierdurch ist auch die gleichartige Anordnung der Ähnlichkeits- mit den Kongruenzsätzen bestimmt.

Von verschiedenen Seiten ist verlangt worden, daß man bei der Definition der Ähnlichkeit und der Ableitung der betreffenden Sätze von dem Ähnlichkeitspunkte ausgehen, also eine nach der Seite der neueren Geometrie hinneigende Behandlung einschlagen solle. Ein derartiger Lehrgang, welcher die ähnlichen Figuren zuerst durch Teilung von Strahlen eines ebenen Strahlenbüschels entstehen läßt, ist für die Schule unseres Wissens zuerst von Tellkampf (Vorschule der Mathematik) ausgeführt worden. Derselbe hat manche Vorzüge, und es ist jedenfalls zu wünschen, daß auch bei dem älteren Verfahren, welches mehr dem Fortschritte vom Besonderen zum Allgemeinen entsprechen dürfte, auf die Lagenbeziehungen ähnlicher Figuren Rücksicht genommen und vielleicht ein besonderer Abschnitt über ähnliche (perspektivische) Lage und Ähnlichkeitspunkte in geeigneter Weise eingeschaltet werde.

Die unmittelbaren Anwendungen der Ähnlichkeitssätze auf das Dreieck und den Kreis (Proportionen beim rechtwinkeligen Dreieck, Pythagoreischer Lehrsatz, Ecktransversalen, Potenzen bei dem Kreise) und die zugehörigen Fundamentalaufgaben, endlich die Sätze über die Ähnlichkeit von Vielecken bieten keine besonderen Schwierigkeiten. Vgl. § 15.

§ 51. Flächeninhalt.

Die Lehre vom Flächeninhalt findet sich in den Lehrbüchern in der Regel in zwei getrennten Teilen, indem die Sätze über die Gleichheit der Figuren von denen über die Verhältnisse und die Berechnung der Flächen abgesondert und vor der Lehre von der Ähnlichkeit behandelt sind. Dies entspricht allerdings der Scheidung derjenigen Sätze, welche den Begriff der Proportionalität voraussetzen, von den anderen, sowie dem Fortschritt vom Leichteren zum Schwierigeren; endlich gestattet dieses Verfahren, den Pythagoreischen Lehrsatz schon an einer früheren Stelle des Unterrichts zu behandeln.

Dagegen werden durch dasselbe Gebiete, welche ihrem sachlichen Inhalte nach zusammengehören, auseinandergerissen, denn die Gleichheit der Figuren ist nur der einfachste Fall des Verhältnisses ihrer Flächen und findet durch die Sätze über letzteres ihre Ergänzung und völlige Klarstellung. So ist z. B. der Satz, daß Parallelogramme mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen inhaltsgleich sind, nur ein besonderer Fall des allgemeinen, daß die Flächen zweier Parallelogramme sich zu einander verhalten, wie die Produkte aus Grundlinie und Höhe, bezw. des daraus folgenden, daß Parallelogramme gleich sind, wenn ihre Produkte aus Grundlinie und Höhe gleich sind, oder wenn ihre Grundlinien sich zu einander umgekehrt verhalten, wie ihre Höhen. Es würde deshalb auch gar nicht nötig sein, jenen ersteren Satz besonders zu beweisen, wenn man seiner zum Beweise des allgemeinen nicht bedürfte. Ohne den letzteren wird die Bedeutung des ersteren nicht erschöpfend klar gestellt, erst durch jenen sieht der Schüler z. B. auf die einfachste Weise gründlich ein, warum dieser nicht dahin umgekehrt werden kann, daß gleiche Parallelogramme auch gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben müßten, und welche richtigen Umkehrungen dagegen gebildet werden können. — Infolge solcher Trennung der Sätze über die Gleichheit der Flächen von ihrer Ergänzung und Anwendung durch die Proportionalität derselben würde der erstere Abschnitt geradezu dürftig ausfallen, wenn derselbe nicht so mannigfache Anwendung durch die Verwandlungsaufgaben erführe. Aber auch die mit letzteren innig zusammenhängenden Teilungsaufgaben weisen auf die Vereinigung und Verschmelzung der beiden Abschnitte hin. Die Aufgabe z. B., ein Parallelogramm (oder Dreieck) durch zu einer Seite parallele (von einem Eckpunkte ausgehende) Transversalen in gleiche Teile zu teilen, gehört einerseits unbedingt zu jenen Sätzen über die Gleichheit der Flächen, andererseits kann man sie nicht ohne Zusammenhang mit der allgemeinen Aufgabe, die Figur durch solche Transversalen in gegebenem Verhältnis zu teilen, behandeln, wenn man nicht sachlich Zusammengehöriges trennen will. — Auch das frühe Vorkommen des Pythagoreischen Lehrsatzes hat wenig Wert, denn derselbe muß an jener Stelle auf die geometrischen Quadrate beschränkt bleiben

und damit ist auch seine Anwendbarkeit sehr eingeengt. Seine völlige Klarstellung erhält er doch erst nachher, wenn gezeigt werden kann, daß die Inhalte der Quadrate durch die zweiten Potenzen der Maßzahlen der Seiten berechnet werden, wenn also neben die geometrische Bedeutung auf diesem Wege, bezw. auch durch die bekannten Proportionen, die arithmetische gestellt ist, welche auf die Möglichkeit von Berechnungen führt.

Bei dem Flächeninhalt von Vielecken unterlasse man nicht, den Satz zu bringen, daß der Inhalt jeder Figur, welcher ein Kreis einbeschrieben werden kann, gleich der Hälfte des Produkts aus ihrem Umfange und dem Radius des Kreises ist. Man findet zuweilen diesen Satz nur in seiner Anwendung auf regelmäßige Polygone aufgestellt, ohne daß die Voraussetzung der Regelmäßigkeit als wesentliche Bedingung des Beweises auftritt. In jener allgemeinen Form findet er später in der Stereometrie ein Analogon für Polyeder, denen eine Kugel einbeschrieben werden kann, und von diesem stereometrischen Satze kann dann manche zweckmäßige Anwendung zu raschen Volumbestimmungen gemacht werden. Für den planimetrischen Satz ist u. a. die Anwendung auf das Dreieck besonders nützlich; sie führt unmittelbar auf die Formel $F = \varrho \,.\, s$, welcher infolge entsprechender Ableitung die weiteren $F = \varrho_a\,(s - a) = \varrho_b\,(s - b) = \varrho_c\,(s - c)$ angeschlossen werden können. Diese Formeln finden später für trigonometrische Berechnungen aus mittelbaren Bestimmungsstücken vielfache zweckmäßige Anwendungen.

Der Pythagoreische Lehrsatz führt uns noch auf eine Bemerkung über die Anwendung bestimmter Namen für häufig gebrauchte Sätze. Dieselben sind sehr zweckmäßig, um in bequemer Weise bei den Begründungen einzelner Behauptungen citieren zu können. In der Planimetrie sind jedoch nur verhältnismäßig wenige solcher Namen in allgemeinem Gebrauch, im Gegensatz zur Trigonometrie. Außer dem Pythagoreischen Lehrsatz sind der Ptolemäische, der Apollonische und einige seltener vorkommende, wie der Lehrsatz des Pappus, allgemein unter diesen Benennungen bekannt; eine Vermehrung der Namen unter allgemeiner Zustimmung erscheint wünschenswert. Kann man nicht mehr, wie bei den vorstehenden, und wie die neuere Geometrie in einer reicheren Anzahl von Fällen thut, den Namen des Entdeckers durch die gewählte Benennung ehren, so empfehlen sich Bezeichnungen, welche auf den Inhalt des betreffenden Satzes bezug haben. Solche sind auch bereits von einzelnen Seiten hier und da vorgeschlagen worden, wie z. B. Tangentensatz, Sehnen- und Sekantensatz u. dgl. m. — Unter dem allgemeinen Pythagoreischen Lehrsatz dürfte die Erweiterung des besonderen auf die Quadrate von Dreiecksseiten zu verstehen sein, welche einem spitzen oder einem stumpfen Winkel gegenüber liegen, denn dieselbe wird häufiger gebraucht als der Satz, welcher die Quadrate über den Seiten des rechtwinkeligen Dreiecks durch ähnliche Figuren über-

haupt ersetzt, und für welchen ebenfalls jene Benennung vorgeschlagen worden ist.

§ 52. Berechnung des Kreises. — Kegelschnitte.

In dem Abschnitt über die Berechnung des Kreises geben die verschiedenen Methoden der elementaren Berechnung von π zu verschiedenartigen Behandlungsweisen Anlaß. Wir raten hier, sich auf den möglichst einfachen Weg zu beschränken und nicht durch Heranziehung einer Reihe von Sätzen Zeit zu verschwenden, welche nur dem Zwecke dienen, die große Weitläufigkeit des elementaren Verfahrens zu vermindern. Denn dasselbe bleibt immer noch umständlich genug, um auf die wirkliche Ausführung der Rechnung durch die Schüler verzichten zu lassen; es genügt also vollständig, den letzteren zu zeigen, daß und wie dieselbe, auch für sie, möglich ist, und ihnen dann das Resultat anzugeben. Wir befinden uns hier in einer ähnlichen Lage, wie bei den Tafeln der Logarithmen der natürlichen Zahlen und der trigonometrischen Funktionen, deren Inhalt wir auch gebrauchen, ohne daß gefordert wird, denselben vorher selbst zu berechnen. Auch hier genügt es ja, eine Möglichkeit der elementaren Ausrechnung und damit der Kontrole der Richtigkeit der einzelnen Zahlen zu zeigen. Daß auch für die Zahl π die Reihenentwickelung zu einer viel bequemeren Methode führt, wie auch, daß die vielfach und außerordentlich weit ausgeführten Berechnungen derselben eine Wiederholung in jedem Sinne unnötig machen, kann noch historisch angemerkt werden.

Vielleicht schadet es auch nichts, das Problem der quadratura circuli zu erwähnen und dabei des neuerdings gelieferten Beweises der Unmöglichkeit seiner Lösung ebenfalls historisch zu gedenken.

Über die Frage der Aufnahme der Kegelschnitte in den Gymnasialunterricht und die Behandlungsweise derselben vgl. § 19, S. 68. Daß dieselben an Realanstalten, welche die analytische Geometrie auf ihrem Lehrplane haben, innerhalb der letzteren Behandlung finden, geht aus der Natur der Sache ohne weiteres hervor; doch ist daneben ein Kursus nach synthetischer Methode keineswegs ausgeschlossen. Derselbe wird entweder einen Teil der besonderen Behandlung der neueren Geometrie bilden, oder da, wo die letztere nicht möglich ist, nach älterer Methode ausgeführt werden. Als Hilfsmittel für derartige Fälle bieten einzelne Lehrbücher einen eigenen Abschnitt; so z. B. des Verfassers Elemente der Mathematik, 2. Teil, im Anhang 12. Außerdem sind in neuerer Zeit mehrere für diesen oder ähnliche Zwecke bestimmte besondere Schriften erschienen, so z. B.:

Erler, die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. Zum Gebrauche in der Gymnasialprima bearbeitet. Leipzig, Teubner, und

Dronke, die Kegelschnitte in synthetischer Behandlungsweise. Leipzig, Teubner.

Wir schließen hier noch die Frage über die Verteilung der wöchentlichen Unterrichtsstunden zwischen der Geometrie und der Arithmetik an. Obgleich ziemlich allgemein anerkannt wird, daß der Schwerpunkt des mathematischen Unterrichts der höheren Schulen in der anschaulicheren Geometrie liegen muß, so bedarf doch die Arithmetik wegen der erforderlichen zahlreichen Übungen und weil sie auch für einen Teil der Geometrie die unentbehrliche Grundlage liefert, kaum geringerer Zeit als die letztere. Man wird daher die gegebenen Unterrichtsstunden auf beide Fächer nahezu in gleichem Maße verteilen und nur da, wo bloß drei wöchentliche Stunden zu Gebote stehen, vielleicht zwei für die Geometrie und eine für die Arithmetik bestimmen. Da aber eine einzelne Wochenstunde wenig Erfolg verspricht, namentlich wegen der langen Zwischenzeit zwischen der Durchnahme einer Unterrichtspartie und ihrer Wiederholung, so fragt es sich, ob man in solchen Fällen nicht lieber die beiden Fächer abwechselnd nacheinander als nebeneinander lehren solle. Eine mehr oder minder lange vollständige Unterbrechung einer Unterrichtsdisciplin kann gewiß sehr nachteilig sein, und die Frage geht also nur dahin, welches von zwei Übeln für das kleinere zu halten sei. Eine Übereinstimmung der mathematischen Lehrer hierüber scheint nicht zu bestehen, und auch wir wagen nicht, hier eine Entscheidung zu treffen. Die letztere wird dem persönlichen Ermessen des Einzelnen anheimzugeben und vielleicht auch durch lokale Verhältnisse und besondere Erfahrungen mit bedingt sein.

---

6. Kapitel.

Die ebene Trigonometrie.

§ 53. Die Grundbegriffe.

Die Einführung in die ersten Begriffe der Trigonometrie kann auf verschiedenen Wegen geschehen. Am gebräuchlichsten ist derjenige, welcher an die Ähnlichkeit der Dreiecke anknüpft, also die Funktionen als Verhältniszahlen der Seiten rechtwinkeliger Dreiecke definiert und diese Erklärung später so erweitert, daß sie auf Winkel jeder Art Anwendung findet.

Dieses Verfahren wird meist demjenigen vorgezogen, welches mit der Darstellung der trigonometrischen Funktionen als Strecken in einem Kreise mit dem Radius 1 *beginnt*, weil die Natur dieser Funktionen als unbenannter Zahlen dort klarer hervortritt, während hier dieselbe eher verdeckt wird. Folgt dagegen die letztere Erklärung der ersteren nach, so wird der Schüler von vorneherein deutlicher darauf hingewiesen, daß die gezeichnete Strecke nur ein Hilfsmittel zur Veranschaulichung, die Funktion selbst aber, als die Maßzahl jener Strecke

für den Radius als Einheit, nichts anderes ist, als eben jene Verhältniszahl. Der Unterschied beider Erklärungen (für spitze Winkel) erscheint ihm nun deutlich als ein nur formaler, indem das einemal ein beliebiges unter den unzählig vielen einander ähnlichen rechtwinkeligen Dreiecken, das anderemal ein bestimmtes, in welchem aus Zweckmäßigkeitsgrunde eine Seite gleich der Maßeinheit gewählt ist, in Betracht gezogen wird. — Auch schließt sich die Erklärung als Verhältniszahlen ungezwungen an früher Gelerntes an, während die Aufstellung der anderen Definitionen für Schüler mehr den Eindruck einer Willkür macht. Endlich führt die erstere unmittelbar auf die nächstliegende Anwendung, die Berechnung rechtwinkeliger Dreiecke aus gegebenen Bestimmungsstücken, hin. Der Vorzug der zweiten Methode liegt darin, daß sie es erleichtert, von vorneherein den Erklärungen die nötige Allgemeinheit zu geben, und daß sie die Abhängigkeitsgesetze der Funktionen von ihrem Argument, dem Winkel oder Bogen, anschaulicher vorführt. Auf diese Veranschaulichung soll jedoch auch im anderen Fall nicht verzichtet werden, da sie später nachfolgt, und der Gang vom Besonderen zum Allgemeinen ist ja pädagogisch berechtigt.

Eine dritte Einführung geht von der eindeutigen Bestimmung eines Punktes durch rechtwinkelige Koordinaten aus und erklärt die Funktionen als Verhältniszahlen der Seiten des Projektionsdreiecks, um auf diese Weise mit den Vorteilen des ersten der obigen Wege zugleich von vorneherein die Allgemeinheit der Definitionen und das Verständnis der Regeln über die Vorzeichen zu verbinden. Auch dieses Verfahren stellt jedoch größere Anforderungen an die Fassungskraft der Schüler, als dasjenige, welches mit dem engeren Begriff beginnt und diesen erst nachher erweitert.

Man kann ferner der historischen Entwickelung folgen und damit unmittelbar an den letzten Abschnitt des planimetrischen Pensums anknüpfen. Die Aufgabe, aus einer Sehne eines Kreises (und dem Radius) den Bogen zu berechnen, oder umgekehrt, wobei der Bogen auch durch seinen Centriwinkel ersetzt werden kann, ist dort für diejenigen Sehnen gelöst worden, welche Seiten konstruierbarer einbeschriebener regelmäßiger Polygone sind; für alle anderen unterliegt sie größeren Schwierigkeiten. Die letzteren würden verschwinden, wenn man in der Lage wäre, zu jedem beliebigen Centriwinkel die Länge der Sehne für irgend eine Länge des Radius mit Leichtigkeit angeben zu können, ähnlich wie bei der Berechnung des Umfangs oder Inhalts eines Kreises. Es ist daher zweckmäßig, alle vorkommenden Sehnen für einen bestimmten Radius, etwa für $r = 1$, ein für allemal zu berechnen und die Resultate in eine Tabelle zu allgemeinem Gebrauche zusammenzustellen. So entstanden in den Anfängen der Trigonometrie (bei Ptolemäus) die Sehnentafeln. Der Nachweis, auf welchem Wege dieselben berechnet werden konnten, kann an dieser Stelle vorbehalten bleiben. Aus der Sehnentafel entsteht dann die Tafel der Sinus durch

Einführung der Hälften der Centriwinkel und der Hälften der Sehnen; den Sinus schließen sich nach und nach die anderen Funktionen als nützlich zu verwendende Hilfsgrößen an.

Bei dieser Behandlungsweise tritt besonders klar hervor, daß die trigonometrischen Funktionen der Aufgabe dienen, den krummen Bogen (oder den Winkel) mit der geradlinigen Sehne in rechnerische Beziehung zu setzen, und man gewinnt ohne weiteres für die Sehne a den Ausdruck $a = 2r \sin \alpha$, welcher später als die Grundlage für die gesamten Dreiecksberechnungen dienen kann. Das Verfahren steht jedoch dem zuerst angegebenen an durchsichtiger Einfachheit für alle Funktionen, sowie auch in Rücksicht auf den unmittelbaren Anschluß an die doch ebenfalls grundlegende Anwendung auf die Berechnung des rechtwinkeligen Dreiecks nach. Es dürfte sich deshalb empfehlen, dasselbe nicht zum Ausgangspunkte zu machen, wohl aber es später, am besten bei der Anwendung des rechtwinkeligen Dreiecks auf die Berechnung gleichschenkeliger Dreiecke und auf Kreisberechnungen, in Gestalt einer historischen Notiz einzuschalten. Durch eine solche Betrachtung derselben Sache von verschiedenen Seiten wird das klare Verständnis derselben gefördert, nur dürfen die verschiedenen Erläuterungen nicht zugleich oder zu rasch nach einander erfolgen. Die erste Definition muß durch zahlreiche Übungen erst in Fleisch und Blut übergegangen sein, sonst wirkt die zweite nicht klärend, sondern störend und verwirrend.

Nachdem die Begriffe der trigonometrischen Funktionen in der angegebenen Weise aufgestellt sind, so daß also durch genetische Einführung derselben zugleich die Berechtigung dieser Aufstellung nachgewiesen ist, müssen also dieselben zunächst durch Übung sicher eingeprägt werden. Denn diese Begriffe sind das ABC der Trigonometrie, bei dem keine Unsicherheit mehr stattfinden darf, wenn eine solche nicht auch jedem weiteren Fortschreiten anhaften soll. Die Einprägung kann nicht durch öfteres Überlesen und Abfragen der Definitionen, sondern allein durch häufigen Gebrauch, gerade so wie bei dem Lesenlernen einer Schrift, überwunden werden. Daher rechne man in der Stunde und stelle für die häusliche Arbeitszeit eine hinreichende Menge von Aufgaben, wie z. B. die Funktionen eines Winkels anzugeben, wenn die Katheten $a = 5{,}1$, $b = 6{,}8$ oder $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$ gegaben sind, man lasse umgekehrt z. B. a aus $\sin \alpha = 0{,}552$ und $c = 1{,}476$ berechnen, u. dgl. m. Falls das Lehrbuch keine derartigen Aufgaben enthält, können dieselben aus des Verfassers Aufgabensammlung, § 1, entnommen werden. — Man sieht leicht ein, daß solche Übungen zugleich als Vorübungen für Kommendes dienen können.

Ob man hierbei noch die Sekanten und Kosekanten anwenden will, kann dahingestellt bleiben. Viele schließen dieselben der Kürze und Einfachheit wegen ganz, also auch schon bei den Definitionen aus, doch kann man über die Berechtigung dazu anderer Ansicht sein. Denn wenn man zu den drei Seitenverhältnissen Sinus, Kosinus und Tangens

auch die Umkehrung des letzten als Kotangens hinzufügt, so erscheint es an dieser Stelle als unwissenschaftliche Willkür, wenn die Umkehrungen der beiden anderen Funktionen einfach totgeschwiegen werden; ein solches Verfahren verstößt gegen das logische Princip der Vollständigkeit von Einteilungen. Daß man nachher in der Praxis die Sekanten und Kosekanten als entbehrlich und der Vereinfachung halber fallen läßt, kann daran nichts ändern. Gewiß würde es für die Schule eine unnütze Beschwerung sein, wenn man die genannten Funktionen, die ja auch in die Tafeln nicht aufgenommen sind, weiterhin irgendwie benutzen wollte; dies ist jedoch kein hinreichender Grund dafür, daß den Schülern auch die Existenz derselben verschwiegen werden solle, zumal gerade denkende Schüler von selbst nach ihnen fragen, bezw. sie vermissen würden, und vielleicht auch Einzelne in die Lage kommen können, denselben in mathematischen Schriften zu begegnen.

Noch ein anderes Verfahren, welchem man in verschiedenen Lehrbüchern begegnet, beruht darin, daß nur der Sinus und der Kosinus mittels des rechtwinkeligen Dreiecks und des Kreises, dagegen die Tangens und Kotangens als Quotienten der ersteren definiert werden. Hierdurch wird der Vorteil erreicht, daß nach allgemeiner Erklärung der beiden ersteren Funktionen diejenigen der letzteren ohne weiteres allgemein giltige sind, und daß die Untersuchung der Eigenschaften der Tangens und ihrer Umkehrung auf rein rechnendem Wege, also vielleicht etwas kürzer geschieht. Das Verfahren ist jedoch künstlich, es läßt die Gleichmäßigkeit der Behandlung der gleichberechtigten Funktionen vermissen, verzichtet zum Teil auf die sinnliche Anschaulichkeit der Darstellung durch Strecken und kann als Ausfluß einer gewissen Willkür erscheinen. Denn die konsequente Durchführung des Princips würde doch heischen, daß auch der Kosinus mittels $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin\alpha^2}$ definiert würde. Und warum führt man bloß die Quotienten, und nicht auch die Summen, Differenzen und Produkte als neue Funktionen ein? Endlich ist die Berechnung eines rechtwinkeligen Dreiecks aus den Katheten a, b oder aus a, α oder b, α ungezwungener, wenn $\operatorname{tg}\alpha$ als der Wert des Verhältnisses $a:b$ definiert wird, und $\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha : \cos\alpha$ als das bestehen bleibt, was es doch im Grunde ist, nämlich ein Lehrsatz, und nicht eine Erklärung.

Was schließlich die Benennungen und Schreibweisen betrifft, so werden sich die auch im vorstehenden angewendeten Namen Tangens und Kotangens statt Tangente und Kotangente des Winkels durch die wünschenswerte Unterscheidung der trigonometrischen von den planimetrischen Begriffen empfehlen. In betreff der Schreibweisen $\sin\alpha^2$ und $\sin^2\alpha$ sind die Ansichten geteilt; die letztere ist die üblichere, die Analogie von $\sin^2\alpha$ mit d^2x spricht jedoch dafür, daß dieselbe als $\sin.\sin\alpha$ gedeutet und daß also nach dem Vorbilde von C. F. Gauß die erstere für das Quadrat des $\sin\alpha$ angewendet werden solle. Man schreibt doch auch nicht $\log^2 x$ für $(\log x)^2$.

§ 54. Goniometrie.

Man hat vielfach empfohlen, auf die Definitionen der Funktionen sofort die Anwendung derselben zur Berechnung rechtwinkeliger Dreiecke folgen zu lassen. Dieses Verfahren hat gute Gründe für sich: es giebt auf einem anderen Wege jene so notwendige Einübung der Grundbegriffe und erregt lebhaft das Interesse der Schüler, welche an so mancher eingekleideten Aufgabe eine Anwendung des Gelernten auf wichtige und wissenswerte Gebiete kennen lernen. Es hat dieses Verfahren aber auch seine mißlichen Seiten. Zunächst erfordert es, daß vorher die Einrichtung und der Gebrauch der trigonometrischen Tafeln erlernt werde. Mag man es auch im Schulunterricht verantworten können, daß die Zahlen einer Tabelle gebraucht werden, ehe die Möglichkeit ihrer Berechnung und Prüfung gezeigt ist, so wird doch durch die Einschaltung der Unterweisung im Aufschlagen der Funktionen und Winkel, zumal dieselbe nicht flüchtig geschehen darf, sondern vielfacher Übung bedarf, jene durch sie bezweckte Befestigung, Klärung und Anwendung der Grundbegriffe hinausgeschoben.

Man kann zwar einwenden, daß der Gebrauch der logarithmisch-trigonometrischen Tafeln an dieser Stelle nicht nötig sei, da man sich einer kleinen Tabelle der sog. natürlichen trigonometrischen Zahlen bedienen könne, deren Gebrauch keine längere Unterweisung nötig mache. In diesem Falle werden jedoch die Ausrechnungen praktischer Übungsbeispiele in bestimmten Zahlen in der Regel schwerfällig und zeitraubend, oder dieselben kommen auf wenig mehr hinaus, als die im vorigen § ebenfalls empfohlenen Vorübungen. Auch bleibt es dann wünschenswert, die Auflösung rechtwinkeliger Dreiecke später noch einmal unter Anwendung der logarithmischen Tafeln zu üben, endlich wird, wenn dies nicht geschieht, der Zusammenhang zwischen der Berechnung rechtwinkeliger und der aus ihr abgeleiteten schiefwinkeliger Dreiecke unterbrochen.

Über die Behandlungsweise der übrigen Teile des goniometrischen Abschnittes sind bereits im § 14 gelegentliche Winke gegeben worden, denen hier nicht viel mehr hinzuzufügen ist. Das dort im einzelnen ausgeführte Beispiel einer trigonometrischen Unterrichtsstunde, welchem jene Winke angeschlossen wurden, wird hinreichen, um ein brauchbares Lehrverfahren im allgemeinen zu erläutern. Wir können uns daher hier auf die Erörterung einiger weiterer Einzelheiten beschränken.

Als Hilfsmittel zur Einübung der abgeleiteten Formeln und Lehrsätze empfehlen sich hier außer der unmittelbaren Anwendung derselben auf bestimmte Zahlenbeispiele namentlich die Beweise der Richtigkeit anderweiter trigonometrischer Formeln und die Auflösungen von Bestimmungsgleichungen. Die ersteren gründen sich darauf, daß die Richtigkeit einer Formel bewiesen ist, wenn es gelingt, aus ihr durch richtige Umformungen einer oder beider Seiten eine andere Gleichung

abzuleiten, deren Richtigkeit bereits früher bewiesen wurde, oder unmittelbar (infolge Identität der beiden Seiten) einleuchtet. Wie fruchtbar solche Übungen für die Einprägung der goniometrischen Sätze und auch sonst sind, möge ein beliebiges Beispiel zeigen, welches wir ohne zu suchen auswählen. Soll die Gleichung

$$\operatorname{tg}(45^0 + \alpha) + \operatorname{tg}(45^0 - \alpha) = \frac{2}{\cos 2\alpha} \qquad (1)$$

bewiesen werden, so sind zunächst die Formeln für $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ und $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, sowie der Satz, daß $\operatorname{tg} 45^0 = 1$ ist, anzuwenden und werden also wiederholt. Mit der so resultierenden Gleichung

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} + \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2}{\cos 2\alpha} \qquad (2)$$

können nun verschiedene Schüler auch verschiedene Wege einschlagen. So kann zunächst links das Gleichnamigmachen, bezw. die Addition der beiden Brüche vorgenommen werden, wobei zugleich die algebraischen Entwickelungen von $(a \pm b)^2$ bezw. $(a + b)^2 + (a - b)^2$ und von $(a + b)(a - b)$ Anwendung finden. In der Gleichung

$$\frac{2(1 + \operatorname{tg} \alpha^2)}{1 - \operatorname{tg} \alpha^2} = \frac{2}{\cos 2\alpha} \qquad (3)$$

kann nun weiter die Formel $\operatorname{tg} \alpha^2 = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$ zur Verwertung kommen, wodurch man nach einigen weiteren algebraischen Umformungen auf eine Identität gelangt. Oder man wendet in (3) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ an, hat dann Veranlassung, die Formeln $\cos \alpha^2 + \sin \alpha^2 = 1$ und $\cos \alpha^2 - \sin \alpha^2 = \cos 2\alpha$ zu wiederholen, und gelangt so ebenfalls auf die identische Schlußgleichung. In einer dritten Entwickelung werden schon in (2) die Tangenten durch Sinus und Kosinus ausgedrückt, und dann entsprechende Umformungen unter Benutzung derselben Sätze wie vorher vorgenommen. — Ist ferner die Gleichung

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a + b)}{\cos a \cos b},$$

nebst
$$2 \cos a \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b)$$

bekannt, oder wird sie vorher entwickelt, so kann dieselbe zur unmittelbaren Umformung von (1) dienen, und man hat dann noch $\sin 90^0 = 1$, $\cos 90^0 = 0$ anzuwenden. — Man kann ferner auch von der Umformung der rechten Seite von (1) mittels $\cos 2\alpha = \cos \alpha^2 - \sin \alpha^2$, $\cos \alpha^2 = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \alpha^2}$, $\sin \alpha^2 = \frac{\operatorname{tg} \alpha^2}{1 + \operatorname{tg} \alpha^2}$ ausgehen, u. s. w.

Man sieht aus diesem Beispiel, wie bei solchen Übungen jeder

neue Fortschritt zugleich mit einer vielseitigen Wiederholung von früher Gelerntem durch Anwendung desselben verbunden wird, und wie auch die selbständige Thätigkeit der Schüler in der Wahl und Ausführung des eingeschlagenen Weges Gelegenheit zur Entfaltung erhält. Daneben wird die Anregung, eigene Wege zu suchen und die Erkenntnis, daß das sichere Auffinden des kürzesten infolge erreichter Gewandtheit ein Gewinn ist, entschieden fördernd wirken, und selbst schwächere Schüler dürften durch die Einsicht, daß eine sachliche Übereinstimmung solcher Arbeiten in keiner Weise notwendig ist, einen Antrieb zur Selbständigkeit erhalten.

Die Auflösung von Bestimmungsgleichungen wirkt in ähnlicher Weise, da sie ebenso die Umformung mittels der bekannt gewordenen Sätze verlangt. Sie bringt aber außerdem die Entscheidung über die Zwei- oder Vieldeutigkeit der Bestimmung von Winkeln durch ihre Funktionen, die für die Anwendungen so wichtig ist, in mannichfaltiger Weise zur Sprache und ist endlich eine sehr nützliche Vorübung für die späteren Aufgaben über die Berechnung von ebenen Figuren aus mittelbaren Bestimmungsstücken.

Wird z. B. die Aufgabe gestellt, die Gleichung

$$\sin(x + \alpha) + \cos(x - \alpha) = \cos(x + \alpha)$$

aufzulösen, so kann der Schüler entweder die betreffenden Formeln für Funktionen von $\alpha \pm \beta$, oder nach erfolgter Transposition von $\cos(x - \alpha)$ auf die rechte Seite diejenige für $\cos a - \cos b$ anwenden. In beiden Fällen wird er auf die Gleichung

$$\sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha = -2 \sin x \sin \alpha$$

geführt. Für die weitere Behandlung werden die beiden gleichwertigen Verfahren, entweder $\sin x$ durch $\cos x$ oder umgekehrt $\cos x$ durch $\sin x$ auszudrücken, abgelehnt, weil durch die Wegschaffung der dann in die Gleichung gebrachten Quadratwurzel der Grad derselben erhöht und hierdurch nicht nur eine größere Schwierigkeit der Auflösung geschaffen, sondern auch falsche Wurzeln der Gleichung erhalten werden, demnach eine darauf bezügliche Untersuchung und Ausscheidung erforderlich würde. Diese Nachteile werden vermieden durch Division aller Glieder mit $\sin x$ oder $\cos x$. Dividiert man durch $\sin x \,.\, \sin \alpha$, so ergiebt sich das einfache Resultat

$$\cot x = -2 - \cot \alpha.$$

Ist also z. B. $\alpha = 135^0$, so ist $\cot x = -1$, demnach hat man für x die zwei Hauptauflösungen $x_1 = 135^0$ und $x_2 = 315^0$, sowie die allgemeine $x = 135^0 \pm n \,.\, 180^0$. — Wird dann späterhin beispielsweise die Aufgabe gestellt, ein Dreieck aus den Winkeln α, β, welche eine Ecktransversale mit den anliegenden Seiten bildet, sowie aus den Abschnitten a, b, in welche sie die gegenüberliegende Seite teilt, zu berechnen, oder die ihr gleichwertige eingekleidete: Von drei in gerader

Linie liegenden Punkten sind die Entfernungen $AB = a$, $BC = b$ bekannt, an einem dritten Punkte D sind die Winkel $ADB = \alpha$, $BDC = \beta$ gemessen; man berechne die Entfernungen DA, DB, DC, so wird die Gleichung

$$\frac{a}{\sin \alpha} \sin(\varphi + \alpha) = \frac{b}{\sin \beta} \sin(\varphi - \beta)$$

durch ein ganz entsprechendes Verfahren auf φ aufgelöst.

Eine eingehendere Anleitung zur Behandlung trigonometrischer Bestimmungsgleichungen findet man in des Verfassers trigonometrischer Aufgabensammlung an den betreffenden Stellen ausgeführt. Indem wir hierauf verweisen, möge nur noch die besondere Wichtigkeit derjenigen Aufgaben für spätere Anwendungen hervorgehoben werden, welche die Berechnung zweier Winkel aus ihrer Summe oder Differenz und aus der Summe, Differenz, dem Produkte oder Quotienten zweier Funktionen derselben verlangen. Es ist sehr zu empfehlen, solche Aufgaben, wie die Auflösung der Gleichungen $\sin x + \sin y = p$, $x + y = \alpha$ oder $\sin x : \sin y = a : b$, $x + y = \gamma$, recht gründlich zu behandeln, weil dadurch spätere Partien eine erhebliche Unterstützung erhalten.

§ 55. Berechnung und Gebrauch der trigonometrischen Tafeln.

Über die Anleitung zur Berechnung der trigonometrischen Tafeln gilt Entsprechendes, wie das im ähnlichen Fall bei den Logarithmentafeln (§ 31) Gesagte. Es kann sich also an dieser Stelle nicht darum handeln, solche Berechnungen wirklich vorzunehmen und zu üben, sondern nur darum, den Schülern eine Möglichkeit derselben nachzuweisen, und sie zu überzeugen, daß die Berechner der gekauften Tafeln einer steten Kontrole der Richtigkeit ihrer Arbeit gewärtig sein müssen. Je kürzer diese für die Zwecke der Schule ziemlich unfruchtbare Partie abgemacht werden kann, desto besser ist es; sie ganz wegzulassen, verbietet die wissenschaftliche Gewissenhaftigkeit.

Daß man von den bekannten Funktionen von 60^0, 45^0, 30^0 und 18^0 ausgeht, durch bereits abgeleitete Formeln von ihnen aus auf eine von 3 zu 3 Grad fortschreitende Tabelle gelangt, daß man ferner daran erinnert, wie durch die bisherigen Sätze die Aufgabe auf die Berechnung einer einzigen Funktion und auf die Winkel zwischen den Grenzen 0 und 45^0 zurückgeführt ist, versteht sich für den elementaren Unterricht von selbst. Für das weitere sind verschiedene Wege möglich; die Wahl des einzuschlagenden wird im allgemeinen durch das eingeführte Lehrbuch bedingt sein. Ein allgemein als das beste anerkanntes Verfahren kann nicht genannt werden, ein solches zu finden würde eine hervorragende methodische Leistung sein.

Auch die Belehrung über die Einrichtung der Tafel und die

Übungen im Gebrauche derselben bieten keinen wesentlichen Anlaß zu neuen Bemerkungen. Vielleicht sind jedoch folgende Winke hier und da von Nutzen.

Um für die Interpolation eine gleichmäßige Regel zu haben, was zur Vermeidung von Flüchtigkeitsfehlern recht zweckmäßig ist, kann man etwa die folgende aufstellen: Bei dem Aufschlagen der Logarithmen der Funktionen gehe man immer von der Funktion des nächsten Winkels der Tafel aus und addiere oder subtrahiere das berechnete Produkt der betreffenden Sekundenzahl und des Proportionalteilchens, je nachdem man sich in der Tafel einer größeren oder einer kleineren Zahl zu nähern hat. Die Entscheidung hierüber wird also durch einen Blick auf die angrenzende Zahl der Tafel gewonnen. So geht man beispielsweise für $\log\cos 25^0 8' 50''$ von $25^0 9'$ aus und addiert die Korrektur für $10''$, weil man sich in der Tafel dem größeren $\log\cos 25^0 8'$ zu nähern hat. — Entsprechend geht man dann beim Aufschlagen eines Winkels zu einer gegebenen Funktion von der nächstliegenden Zahl der Tafel aus und entscheidet die Frage, ob die berechneten Sekunden zu addieren oder zu subtrahieren sind darnach, ob man sich in der Tafel einem größeren oder einem kleineren Winkel zu nähern hat. — Man erreicht durch dieses Verfahren auch den Vorteil, daß man niemals mit größeren Zahlen bei der Interpolation zu rechnen hat, als nötig ist.

Diese Interpolation sollte (bei fünfstelligen Tafeln) stets im Kopfe gemacht werden, wodurch zugleich eine hübsche Anwendung des Kopfrechnens mit abgekürzten Resultaten geboten wird. Diese Ausrechnung geschieht, da nur die nächstliegende ganze Zahl mit Sicherheit ermittelt zu werden braucht, bei einiger Übung meist in kürzerer Zeit, als das Aufsuchen der betreffenden Stelle in besonderen Proportionaltäfelchen erfordern würde. Einige Beispiele mögen das Verfahren erläutern:

Für $\log\cos 42^0 15' 10''$ ist die Differenz für die Minute 12, also hat man $\frac{12}{60} \cdot 10 = \frac{10}{5} = 2$ oder $\frac{12}{6} = 2$ zu subtrahieren. — Für $\log\sin 32^0 13' 17''$ ist die Differenz 20, also ist $\frac{20}{60} \cdot 17 = \frac{17}{3}$, d. i. abgekürzt 6 zu addieren. Für $\log\operatorname{tang} 57^0 12' 9''$ hat man

$$\frac{28}{60} \cdot 9 = \frac{30 - 2}{60} \cdot 9 = \frac{9}{2} - \frac{9}{30},$$

und man übersieht mit einem Blicke, daß das Resultat 4 ist, weil von $4\frac{1}{2}$ noch ein kleiner Betrag zu subtrahieren ist. Wer in solchem Falle $\frac{28}{60} \cdot 9$ genau ausrechnen wollte, würde sich nur unnötige Arbeit machen. — Für $\log\cot 74^0 46' 59''$ ist $\frac{50}{60}$, also 1 zu addieren. — Für $\log\sin 15^0 36' 17''$ hat man $\frac{46}{60} \cdot 17 = \frac{23}{30} \cdot 15 + \frac{23}{30} \cdot 2 = \frac{23}{2} + \frac{23}{15}$, also 13 oder $\frac{3}{4} \cdot 17 + \frac{17}{60} = \frac{51}{4} + \frac{17}{60} = 12\frac{3}{4} + \frac{17}{60}$, also 13.

Dieses Verfahren setzt voraus, daß die Differenzen in der Tafel für die Minute angegeben, und nicht bereits für die einzelne Sekunde als Decimalbrüche berechnet sind; im letzteren Fall wird der Schüler meist zur Feder greifen und Zeit verlieren. Es ist ferner voraus-

gesetzt, daß auf die Benutzung der Zehntel der Proportionalteilchen verzichtet wird, welche von einigen als ein Ersatz für die fehlende sechste Stelle während der Rechnung mit herangezogen werden, um eine etwas größere Genauigkeit der fünften Decimale in dem Resultat zu erzielen. Man erhält so z. B. bei der Berechnung der drei Winkel eines Dreiecks aus den drei Seiten eher eine genau stimmende Winkelsumme, und das hat methodisch einen gewissen Wert. Bedenkt man jedoch, daß sowieso bei fünf Decimalen die einzelne Sekunde nicht mehr garantiert werden kann, und wie groß in der Praxis auch eine solche Genauigkeit von einer Sekunde schon ist, so wird man im Unterricht wohl auf jenen kleinen Vorteil um der Erleichterung der mechanischen Arbeit willen verzichten dürfen.

Noch anders liegt die Sache, wenn man, wie neuerdings vielfach beliebt geworden, überhaupt nicht mit Sekunden, sondern mit Decimalteilen der Minute rechnet. In diesem Falle ist die Hinzufügung kleiner Proportionaltäfelchen und ihr Gebrauch bei der trigonometrischen Tabelle erleichtert und der letztere dem Verfahren bei den Logarithmen der Zahlen analog. (So z. B. in den neueren Auflagen der Augustschen Logarithmentafel.)

Bei Winkeln, welche nahe an 0^0 liegen, ist bekanntlich für die Sinus, bezw. auch die Tangenten und Kotangenten, und bei solchen, welche nahe an 90^0 liegen, für die entsprechenden Kofunktionen die gewöhnliche Interpolation nicht anwendbar. Man thut gut, solche Winkel im Anfange ganz zu vermeiden, und das für sie einzuschlagende Verfahren, wenn überhaupt, so erst dann zu lehren, nachdem das regelmäßige durch zahlreiche Anwendungen völlig sicher und geläufig geworden ist. Ob man die Methoden, solche Winkel, welche durch gewisse Funktionen nicht scharf bestimmt werden, bei den Dreiecksberechnungen in den betreffenden Fällen zu umgehen, in den Unterricht mit aufnehmen soll, kann bezweifelt werden, weil es nicht die Aufgabe der Schule ist, praktische Rechner auf dem vorliegenden Gebiete auszubilden. Dagegen können diese Fälle für strebsame Schüler, welche der Mathematik ein mehr als gewöhnliches Interesse zuwenden, eine hübsche Gelegenheit zu Privatstudien bieten, wenn ihnen das Lehrbuch die dazu nötige Hilfe durch Anmerkungen leistet. Ist z. B. ein rechtwinkeliges Dreieck aus der Hypotenuse c und einer Kathete a zu berechnen, und der Winkel α durch seinen Sinus mittels der Tafel nicht genau genug bestimmbar, weil er zu nahe an 90^0 liegt, so bedarf es zur Aufstellung der dann zu gebrauchenden Formel $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta^2 = (c - a) : (c + a)$ nur einer Andeutung, um dieselbe einem guten Schüler durch eigene Arbeit erreichbar zu machen, und entsprechendes gilt für die übrigen derartigen Fälle.

Auch die unmittelbare Anwendung der trigonometrischen Tafeln zur Auswertung numerischer Ausdrücke, welche keine logarithmisch ununterbrochene Rechnung zulassen, mittels des Gebrauchs von Hilfs-

winkeln greift, wenigstens wenn sie bis zu praktischer Fertigkeit gebracht werden soll, zu sehr in die technische Seite hinüber und bietet in diesem Falle im Verhältnis zu der erforderlichen Zeit zu wenig allgemein Anregendes, um Gegenstand des regelmäßigen Unterrichts sein zu können. Für die Fundamentalaufgaben der Dreiecksberechnung ist der früher ziemlich beliebte Gebrauch der Hilfswinkel durch kürzere, logarithmisch bequeme Methoden überflüssig gemacht worden. Die für den Praktiker nützlichen Gaußischen Summen- und Differenzenlogarithmen finden in der Schule keine nennenswerte Anwendung, welche den Zeitverbrauch für ihre Einübung rechtfertigen könnte, und auch die goniometrische Auflösung quadratischer Gleichungen hat für die Zwecke der Schule nur geringen Wert. Selbst für den Praktiker bietet die Auflösung von $x^2 \pm px \pm q = 0$ mittels der Hilfswinkel nur dann eine Abkürzung, wenn $\log p$ und $\log q$ gegeben sind, und $\log x$ verlangt wird. Nur für den irreducibelen Fall der Cardanischen Formel ist selbstverständlich die goniometrische Auflösung auch im Schulunterricht nicht zu entbehren und muß besonders gelehrt werden, wenn man nicht in der Lage ist, dieselbe an die Moivresche Binomialformel anschließen zu können. — Dagegen bieten alle die vorstehend genannten Anwendungen wieder ein recht hübsches Gebiet für die Privatarbeit solcher Schüler, welche aus freiem Antriebe eine Weiterbildung in der Mathematik durch mehr selbständige Thätigkeit suchen, weil ihr persönliches Interesse besonders nach dieser Seite geht und ein bereits deshalb ins Auge gefaßter Beruf einer derartigen freien Arbeit ein lohnendes Ziel zeigt. In solchem Falle lassen sich leicht auch noch andere Gebiete, wie die indirekte Auflösung von höheren und transcendenten Gleichungen, die Bestimmung der mehrfachen Werte einer Wurzelgröße mittels der Moivreschen Formel u. a. m. anschließen. Eine Anleitung hierzu kann durch des Verfassers trigonometrische Aufgabensammlung, Anh. 3, Nr. 124—148 gegeben werden.

Um Mißverständnissen vorzubeugen, sei noch bemerkt, daß mit dem Vorstehenden keineswegs jede, auch nur theoretische Erwähnung und jeder Gebrauch von Hilfswinkeln im Unterricht abgelehnt werden soll. Wer beispielsweise seine Schüler soweit führt, daß dieselben Aufgaben behandeln, welche durch Gleichungen von der Form $a \sin x + b \cos x = c$ gelöst werden, wird sicher auch die Substitutionen $a = n \cos\varphi$, $b = n \sin\varphi$ und ihre Anwendung erläutern und üben müssen. Nur die mechanischen Übungen mittels der Tafeln behufs Erzielung einer praktischen Fertigkeit, noch dazu vielleicht in Fällen eines zweifelhaften Nutzens auch nach dieser Seite sollten, ebenso wie auch eine den Zwecken des Schulunterrichts ferner liegende theoretische Vertiefung in entlegene Gebiete, durch die vorstehenden Bemerkungen zurückgewiesen werden.

§ 56. Die Berechnung rechtwinkeliger Dreiecke.

Die Berechnung rechtwinkeliger Dreiecke ist eine unmittelbare Anwendung der Definitionsgleichungen der trigonometrischen Funktionen in Verbindung mit dem Pythagoreischen Lehrsatze und der Winkelsumme. Neue Formeln oder Methoden sind daher hier nicht abzuleiten und zu lernen, höchstens könnte die Gleichung für den Flächeninhalt $F = \frac{1}{4} c^2 \sin 2\alpha$ hierher gerechnet werden. Man wird also nur die Regel zu geben haben, daß man für jede gesuchte Größe im allgemeinen diejenige Gleichung auswählt, welche dieselbe und die zwei gegebenen Stücke enthält, sie wenn nötig auf die Unbekannte auflöst und dann diese für numerische Beispiele logarithmisch berechnet. Für letztere kann ferner jedes bereits berechnete Stück als bekannt zur Berechnung der übrigen mit benutzt werden, und man wird hiervon Gebrauch machen, wenn die Ausführung der Rechnung dadurch erleichtert wird, wie bei der logarithmisch unbequemen Gleichung $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. — Man wird zur Übung alle einzelnen Fälle durchnehmen und dazu einige Zahlenbeispiele rechnen lassen.

Für diese ist, was auch für das Folgende ein für allemal zu beachten, eine bestimmte geordnete Schreibweise einzuführen, sodaß jede Rechnung nach einem Schema erfolgt, bei dem jede einzelne Zahl an der für sie festgesetzten Stelle steht. Eine solche Ordnung der Rechnungen ist nötig, um denselben leichte Übersichtlichkeit zu verleihen, ein unnützes Hin- und Hersuchen in denselben und das wiederholte Hinschreiben derselben Zahl oder gar Wiederholungen schon ausgeführter Einzelrechnungen zu vermeiden. Auch ermöglicht eine solche Ordnung mit der Zeit die Weglassung der Bezeichnungen vor den numerischen Werten, da man aus der bloßen Stellung der letzteren im Rechnungsschema zu jeder Zeit ihre Bedeutung ersehen kann; auch durch diese, wegen ihrer häufigen Wiederholung nicht gering zu schätzende Ersparnis gewinnt die Rechnung an Übersichtlichkeit. Ein Hauptgrundsatz jeder praktischen Ausrechnung muß immer sein, daß alles unnütze Schreiben vermieden wird. Selbstverständlich muß jedoch im Anfange, ehe der Schüler an die bestimmte Ordnung gewöhnt ist, die Bedeutung der Zahlen denselben immer vorgesetzt werden; sie darf erst wegbleiben, wenn sie auch für den Schüler entbehrlich geworden ist.

Jene bestimmte Anordnung der Rechnung soll jedoch keineswegs nach mechanischen, auswendig zu lernenden Schematen erfolgen, sondern letztere sollen das Ergebnis allgemeiner Regeln oder Gesetze sein, welche jedesmal auf den einzelnen Fall je nach dessen Eigentümlichkeiten angewendet werden. Solche Regeln können in verschiedener Weise aufgestellt werden, ihre Wahl kann dem einzelnen Lehrer überlassen bleiben. Wir werden weiterhin an geeigneten Stellen Beispiele dazu geben, und begnügen uns an dieser Stelle mit der Vorführung

und Erläuterung eines einzelnen besonders einfachen, zur Berechnung rechtwinkeliger Dreiecke.

Es seien aus der Hypotenuse $c = 3{,}47\ m$ und einem spitzen Winkel $\alpha = 32^0\ 5'\ 30''$ die übrigen Stücke a, b, β zu berechnen. Man hat also drei Einzelaufgaben, welche durch die Formeln $a = c \,.\, \sin\alpha$, $b = c \,.\, \cos\alpha$, $\beta = 90^0 - \alpha$ bestimmt werden. Überläßt man nun den Schüler sich selbst, so wird er vielleicht zuerst $\log 3{,}47$, dann $\log\sin 32^0\ 5'\ 30''$ aufschlagen, darauf die Tafel beiseite legen und zunächst die beiden Logarithmen addieren. Dann ergreift er die Tafel wieder, um zu dem nun vorliegenden $\log a$ den Numerus zu suchen; er wechselt also die Tafel. Darauf geht er zur Berechnung von b über, sucht zu diesem Zweck die Stelle, an welche er vorher den $\log c$ geschrieben hatte, um denselben von da abzuschreiben; er schreibt also dieselbe Zahl zweimal, wenn er sie nicht gar zweimal in der Tafel aufschlägt. Dann sucht er $\log\cos\alpha$, d. h. er wechselt wieder die Tafel und blättert nach einer Seite, welche vorher schon vor ihm lag, und die er unnützer Weise wieder verschlagen hatte. Darauf läßt er die Tafel wieder liegen um zu addieren, nimmt dieselbe wieder vor um in nochmaligem Wechsel derselben den Numerus zum $\log b$ aufzuschlagen, endlich subtrahiert er $32^0\ 5'\ 30''$ von 90^0 um β zu erhalten, und kann sich nun die drei einzelnen Resultate aus verschiedenen zerstreuten Stellen zusammen suchen.

Wie ganz anders steht hiergegen die folgende Rechnung: $\log c$ wird nur einmal aufgeschlagen und hingeschrieben. Dann werden in der noch zur Hand liegenden Tafel $\log\sin\alpha$ und $\log\cos\alpha$ unmittelbar nach einander gesucht und unter $\log c$ geschrieben. Man findet also zwei vorher getrennt aufgeschlagene Zahlen auf derselben Seite und in derselben Zeile der Tafel. Jetzt erst geht man zum Rechnen auf dem Papiere über und führt beide Additionen unmittelbar nach einander aus, wobei man nur sich daran gewöhnen muß, auch zwei Zahlen mit Leichtigkeit zu addieren, welche durch eine zwischen liegende getrennt sind. (Wer dies vermeiden will, kann auch $\log\sin\alpha$ über und $\log\cos\alpha$ unter $\log c$ schreiben.) Darauf sucht man endlich in der Tafel der Logarithmen wieder unmittelbar nach einander die Numeri zu $\log a$ und $\log b$, die man unter einander schreibt, und denen man noch den im Kopfe berechneten Wert von $90^0 - \alpha$ hinzufügt. Man hat dann die drei Resultate beisammen.

Die Rechnung würde hiernach — wenn auch die Interpolation in der früher angegebenen Weise im Kopfe ausgeführt wird — in folgender Art geschrieben werden können:

$c = 3{,}47\ m$	0,54033
$\alpha = 32^0\ \ 5'\ 30''$	9,72532
$\beta = 57^0\ 54'\ 30''$	9,92799
$\alpha = 1{,}84(35)\ m$	0,26565
$\beta = 2{,}93(98)\ m$	0,46832.

Man lasse etwa dasselbe Exempel von einem Schüler ohne Anleitung zur Schreibweise rechnen und vergleiche beide Rechnungen in Rücksicht auf ihre Übersichtlichkeit! Neben der letzteren aber ist bei dem vorstehenden Verfahren auch an Zeit gewonnen, denn man spart das Hinschreiben des zweiten $\log c$, das zweite Aufsuchen der Seite und Zeile für den Winkel α, man wechselt nur zwei- (oder drei-) mal statt siebenmal zwischen der Tafel und dem Rechnen auf dem Papiere und nur zweimal statt viermal zwischen den beiden Tafeln. Man achte diese kleinen Ersparnisse nicht gering, denn dieselben summieren sich recht erheblich. Wenn die Schüler — und das ist durchschnittlich nicht zuviel gesagt — eine Rechnung in der Hälfte der Zeit ausführen, welche andere dazu brauchen, so ist der Gewinn beträchtlich genug, und jede Ersparung an mechanischer Arbeit ist mit Dank anzunehmen; sie kommt der geistigen zu gut. Auch hat eine derartige Gewöhnung an Ordnung, an Ausnutzung der Zeit und an Wertschätzung auch des Kleinen — welches die Schüler freilich zuweilen mit Kleinlichem verwechseln — einen entschiedenen pädagogischen Wert.

Wir haben also in dem vorstehenden Beispiel zunächst die folgenden allgemeinen Regeln für die Anordnung der Rechnungen angewendet: Man vermeide so viel als möglich einen Wechsel zwischen dem Aufschlagen in den Tafeln und dem Rechnen auf dem Papiere, man lege also die Hand nicht eher aus den Tafeln, als bis man alles aufgeschlagen hat, was an dieser Stelle der Rechnung überhaupt aufgeschlagen werden kann, und ebenso bringe man die Hand nicht wieder in die Tafeln, ehe man auf dem Papiere alles gerechnet hat, was sich vorher rechnen läßt. Ebenso vermeide man möglichst einen Wechsel zwischen den beiden Tafeln und insbesondere verlasse man auch keine Seite oder Zeile einer Tafel, ehe alles aufgeschrieben ist, was von derselben entnommen werden muß. Daran schließt sich weiter die praktische Regel: Man gewöhne sich, auch solche Zahlen mit Leichtigkeit addieren und subtrahieren zu können, welche nicht unmittelbar unter einander geschrieben sind. Mit Hilfe derselben wird es gelingen, endlich auch die noch übrige zu befolgen: Man vermeide es in **einer** Rechnung dieselbe Zahl zweimal zu schreiben.

Außerdem wird man in dem vorstehenden Musterbeispiel beachten, daß die eine Kolonne nur die — gegebenen und gesuchten — Stücke des Dreiecks in übersichtlicher Folge, die andere dagegen nur die gebrauchten Logarithmen enthält, und daß horizontal neben jeder Seite ihr Logarithmus und neben jedem Winkel der Logarithmus seines Sinus steht.

Die Anwendungen des rechtwinkligen Dreiecks.

An die Berechnung rechtwinkeliger Dreiecke schließt sich unmittelbar diejenige gleichschenkeliger Dreiecke und regelmäßiger Polygone, sowie die von Sehnen und Segmenten eines Kreises an.

Zur Anregung und Belebung werden dann Anwendungen auf praktische Aufgaben dienen, welche sich aus einer reichen Fülle heraus wählen lassen. Bestimmung von Höhen, Aufgaben aus der astronomischen Geographie oder aus der Mechanik und da, wo ein guter mineralogischer Unterricht vorhergegangen ist, auch solche über krystallographische Körper bieten mannigfaltige Gelegenheit, den Schülern zu zeigen, daß sie schon mit dem bisher Gelernten etwas Praktisches anfangen und eine gewisse Einsicht in manche interessante und wichtige Probleme gewinnen können. Beispiele hierzu liefern die Aufgabensammlungen und einzelne Lehrbücher.

Auch wird man hier schon, zugleich als Vorübung für Späteres, zusammengesetzte Aufgaben, d. h. solche behandeln können, in denen unter den Bestimmungsstücken auch andere Größen als Seiten und Winkel, oder Summen und Differenzen von solchen vorkommen. Ist z. B. ein rechtwinkeliges Dreieck aus der Differenz der Katheten $a - b = d$ und dem größeren spitzen Winkel α zu berechnen, so werden tüchtige Schüler, welche vorher in der Behandlung eingekleideter Aufgaben mit mehreren Unbekannten gut geübt worden sind, schon selbständig auf vielleicht folgenden Gedankengang kommen: Für die beiden unbekannten Katheten a, b ist eine Gleichung, nämlich $a - b = d$ unmittelbar durch die Aufgabe gegeben; wir suchen also noch eine zweite Gleichung für dieselbe. Dazu muß der außerdem noch gegebene Winkel α benutzt werden; eine Gleichung zwischen a, b und α ist aber in $a : b = \operatorname{tg} \alpha$ bekannt. Nunmehr haben wir nur die zwei Gleichungen auf die beiden Unbekannten aufzulösen, da alles weitere dann schon früher erledigt ist. Wir rechnen also etwa:

$$a = b \,.\, \operatorname{tg} \alpha; \quad b(\operatorname{tg} \alpha - 1) = d,$$

daher

$$b = \frac{d}{\operatorname{tg} \alpha - 1}, \quad a = \frac{d \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - 1}.$$

Hier wird nun vielleicht der Lehrer darauf aufmerksam machen, daß die so gewonnenen Formeln logarithmisch unbequem sind, und demnach eine geeignete Umformung vorzunehmen ist. Man gewinnt leicht mittels $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha : \cos \alpha$ zunächst

$$b = \frac{d \,.\, \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}, \quad a = \frac{d \,.\, \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$$

und erkennt, daß die Aufgabe auf

$$c = \frac{d}{\sin \alpha - \cos \alpha}$$

und dessen weitere Umformung führt. Letztere kann nun noch mittels $\sin \alpha - \sin (90^0 - \alpha) = 2 \,.\, \cos 45^0 \,.\, \sin (\alpha - 45^0)$ vorgenommen werden.

Hiernach werden dann Aufgaben, wie $b + c$, α oder $c - b$, α

oder $a + b + c$, α u. dgl. zu selbständiger Bearbeitung für die ganze Klasse gestellt werden können.

Endlich kann als Übungsstoff an dieser Stelle des Unterrichts auch das Ableiten und Beweisen von Lehrsätzen und Formeln über das rechtwinkelige Dreieck benutzt werden, wie z. B. der Formel $\sin 2\alpha = 2ab : c^2$, oder des Satzes: Ist in einem rechtwinkeligen Dreieck eine Kathete doppelt so groß als die andere, so bilden die Radien der drei äußeren Berührungskreise eine arithmetische Reihe, u. dgl. m.

Das Material zur Anwendung und Übung des Gelernten ist also hier schon ein überreiches, und man wird mit demselben nach genauer Zeiteinteilung Maß zu halten haben.

§ 57. Das schiefwinkelige (allgemeine) Dreieck.

a. Die Fundamentalaufgaben.

Das Bedürfnis, für die wichtigsten Lehrsätze kurze bezeichnende Namen zu besitzen, welche das Citieren derselben erleichtern, hat für die Grundformeln der ebenen Trigonometrie zu mehreren fast allgemein benutzten Benennungen geführt. An der Spitze stehen der Sinussatz und der Kosinussatz. Der letztere Name wird leider von Einigen, statt für die trigonometrische Form des allgemeinen Pythagoreers, für die wenig gebrauchte Gleichung $c = a \cos \beta + b \cos \alpha$ angewendet, sodaß eine Zweideutigkeit noch nicht ausgeschlossen ist. Daneben findet man auch in verschiedener Anwendung den Namen Projektionssatz. Allgemeiner ist wieder der Tangentensatz, oder — was vielleicht mit Rücksicht auf den Tangentensatz der Planimetrie vorzuziehen — die Tangentenformel, nebst der Mollweideschen oder auch Gaußischen Doppelformel im Gebrauch. Für die Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a \,.\, \sin \gamma}{b - a \,.\, \cos \gamma}$$

hat der von Brockmann vorgeschlagene Name „separierte Tangentenformel" von einigen Seiten Beifall gefunden. Außerdem dürfte sich noch für die viel gebrauchte $a = 2r \,.\, \sin \alpha$ u. s. w. die Benennung „Sehnenformel" empfehlen. Wir werden im folgenden diese Namen in dem durch das Vorstehende angegebenen Sinne gebrauchen.

Bei der Ableitung aller dieser Sätze tritt wieder der Streit zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Prinzip auf. Bekanntlich lassen sich aus einem einzigen derselben in seinen verschiedenen Formen und unter Benutzung der Winkelsumme alle übrigen auf rein rechnendem Wege in voller Allgemeinheit ableiten, es lassen sich aber auch für jeden derselben selbständige geometrische Beweise geben, die jedoch dann nicht bloß für spitzwinkelige und stumpfwinkelige Dreiecke, sondern auch für rechtwinkelige einzeln durchgeführt werden müssen.

Denn wenn von einem zu berechnenden Dreieck ein oder mehrere Winkel unbekannt sind, weiß man ja nicht, ob dasselbe nicht rechtwinkelig ist; die Rechnungsmethoden müssen demnach als auch für diesen Fall giltig nachgewiesen sein. Je nachdem man sich nun im Prinzip oder auch einzeln bei den verschiedenen Sätzen für das geometrische oder für das arithmetische Verfahren entscheidet, und außerdem bei dem rein arithmetischen je nach der Wahl des an die Spitze zu stellenden Satzes, aus welchem die übrigen abgeleitet werden sollen, kann also der Lehrgang ein sehr verschiedener sein, und auch die Aufeinanderfolge und der Gang der Ableitungen bieten Anlaß zu Verschiedenheiten. Auch hier wird der Anfänger sich dem Gange des Lehrbuchs unterwerfen müssen, und nur wo die Wahl desselben in Frage kommt, wird er seine methodische Ansicht zur Geltung bringen können und vielleicht der nachstehenden des Verf. zustimmen: Der Sinussatz und der Kosinussatz werden als Fundamentalformeln auf geometrische Entwickelung gestützt, alle übrigen aber analytisch abgeleitet. Abweichende Methoden können, sofern die Zeit reicht, daneben nur als Übungsmaterial vorgeführt werden.

Die Gründe für diese Ansicht sind folgende:

Bei dem Kosinussatze liegt die geometrische Ableitung schon so gut wie fertig in dem allgemeinen Pythagoreischen Lehrsatze der Planimetrie vor; diese beiseite zu schieben und eine nicht gerade sehr kurze und übersichtlich klare Rechnung aus dem Sinussatz an ihre Stelle zu setzen, würde eine unmotivierte Weitläufigkeit sein. Andererseits aber ist der Sinussatz so hervorragend wichtig, daß man ihn gern an der Spitze sehen wird, und seine Ableitung aus der Figur ist so einfach und fast unmittelbar einleuchtend, daß dagegen die rechnende aus dem Kosinussatze als ein Mißgriff erscheinen müßte. Weiterhin wird man den Vorzug der Anschaulichkeit der geometrischen Methode, durch welche die Bedeutung des Satzes klarer hervortritt, gerade bei einer Fundamentalformel nicht gerne vermissen. Die Zerlegung eines schiefwinkeligen Dreiecks in zwei rechtwinkelige und die Ableitung der verschiedenen Ausdrücke für die Höhe sind doch etwas so Einfaches und auch wegen sonstigen Gebrauchs zu Übendes, daß dagegen eine analytische Ableitung aus einem anderen Satze an Wert für den Schüler gar nicht aufkommen kann. Ja man wird auch daneben die Veranschaulichung durch die geometrische Darstellung der drei Ausdrücke $\frac{a}{\sin\alpha}$, $\frac{b}{\sin\beta}$, $\frac{c}{\sin\gamma}$ mittels des Durchmessers des umbeschriebenen Kreises nicht gern vermissen, und deshalb sogar noch eine zweite Ableitung auf Grund der später viel gebrauchten, nur geometrisch abzuleitenden Sehnenformel wünschen; wenn sie auch vielleicht nicht jeder an derselben Stelle des Unterrichts vornehmen wird. — Mit dem durch die beiden Fundamentalformeln gewonnenen Schatze von Gleichungen gestalten sich aber nun die analytischen Entwickelungen der folgenden Sätze einfach und

übersichtlich genug, während die geometrischen zum Teil mit zunehmender Kompliziertheit der Figur an Einfachheit verlieren, daher gelangt hier das analytische Prinzip zum Vorwiegen. Nur für die separierte Tangentenformel und für die Gleichung $c = a \,.\, \cos\beta + b \,.\, \cos\alpha$, wenn man diese überhaupt benutzen will, dürfte noch die geometrische Ableitung gelten, weil bei dieser die Formeln sich aus dem in zwei rechtwinkelige zerlegten Dreiecke sozusagen unmittelbar ablesen lassen, und dieses Verfahren daher auch eine gute Hilfe für das gedächtnißmäßige Behalten der Formeln liefert.

Die Berechnung eines Dreiecks aus einer Seite a und zwei Winkeln α, β bietet zu der Bemerkung Anlaß, daß es sehr zu empfehlen ist, den Sinussatz für die rechnenden Anwendungen immer nur in der Form

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

zu schreiben. Zunächst wird der Schüler dadurch vor Irrtümern bei dem Aufstellen der Auflösungsformeln

$$b = \frac{a}{\sin\alpha} \cdot \sin\beta, \quad c = \frac{a}{\sin\alpha} \cdot \sin\gamma \tag{1}$$

geschützt, wenn er sich einprägt, daß zu einer Seite im Zähler immer der Sinus ihres Gegenwinkels im Nenner stehen muß (oder umgekehrt), während bei der Schreibweise

$$b = \frac{a \,.\, \sin\beta}{\sin\alpha}, \quad c = \frac{a \,.\, \sin\gamma}{\sin\alpha} \tag{2}$$

erfahrungsgemäß hier und da aus Fahrlässigkeit oder Übereilung auch einmal $b = \frac{a \,.\, \sin\alpha}{\sin\beta}$ od. dgl. geschrieben werden kann. Dann aber weist ihn die Schreibweise (1) nachdrücklich auf eine richtige Ordnung der Ausrechnung hin, bei welcher $\frac{a}{\sin\alpha}$ für beide Seiten nur einmal berechnet und demnach an Arbeit gespart, an Übersichtlichkeit — gegen die durch (2) angedeutete Reihenfolge — gewonnen wird. Wer zuerst $\log a$, dann $\log\sin\beta$ aufschlägt, dieselben addiert, dann $\log\sin\alpha$ aufschlägt, ihn subtrahiert, darauf den Numerus sucht, um dann in gleicher Weise auch c zu berechnen, schreibt zwei Zahlen und führt eine Subtraktion doppelt aus, außerdem wechselt er siebenmal statt zweimal zwischen der Tafel und der Rechnung auf dem Papier und viermal statt zweimal zwischen den beiden Tafeln.

Die Berechnung eines Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel geschieht, wenn numerische Beispiele mit Logarithmen auszuwerten sind und alle drei unbekannten Stücke verlangt werden, stets am vorteilhaftesten mit der Mollweideschen Doppel-

formel. Auch wenn nur die Winkel oder nur die fehlende Seite verlangt werden, kann die letztere mit den anderen Methoden konkurrieren. Anders aber verhält es sich, wenn gesuchte Stücke aus irgend einem Grunde bloß durch die gegebenen, also ohne Vermittelung eines anderen, ebenfalls erst zu suchenden Stückes ausgedrückt werden sollen, wie dies z. B. bei zusammengesetzten Rechnungen behufs Substitution der allgemeinen Werte in andere Ausdrücke vorkommen kann. Es ist dies schon hier um so mehr hervorzuheben, als dieser Umstand von einer einseitigen, nur die unmittelbare Verwendung für bestimmte Zahlenbeispiele ins Auge fassenden Richtung nicht gehörig beachtet zu sein scheint. Im vorliegenden Dreiecksfall sind dann allein der Kosinussatz und die separierte Tangentenformel, also gerade die für logarithmische Rechnungen unvorteilhaftesten Gleichungen anzuwenden.

Wenngleich die Formeln und Schemata nicht auswendig gelernt werden sollen, so können doch in Fällen, wo Verwechselungen von Bestandteilen einer oder mehrerer Gleichungen leicht stattfinden, gewisse mnemonische Hilfsmittel von einigem Werte sein. Für die zur logarithmisch ununterbrochenen Berechnung des Dreiecks im vorliegenden Fall gebrauchten Formeln hat sich dem Verf. das folgende Verfahren bewährt: Zuerst war die Mollweidesche Doppelformel in bekannter Weise aus dem Sinussatze, dann aus ihr durch Division die zur unmittelbaren Anwendung geeignete Gestalt der Tangentenformel:

$$\frac{a-b}{a+b} \cot \tfrac{1}{2}\gamma = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),$$

und endlich aus ihr die bekannte

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

abgeleitet worden. Für das gedächtnismäßige Behalten wurde nun die umgekehrte Reihenfolge empfohlen: Die letzte Formel prägt sich infolge ihres symmetrischen Baues leicht ein, von ihr führt die Multiplikation mit $\cot \frac{1}{2}\gamma = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, welche die zwei Seiten a, b mit dem eingeschlossenen Winkel zusammenbringt, auf die vorhergehende zurück, und diese spaltet man dann wieder sozusagen in Zähler und Nenner, indem man noch rechts beidemale den verschwundenen Faktor c hinzufügt. Der Schüler irrt bei der Erinnerung hieran niemals darin, ob er zu $a-b$, bezw. $a+b$ solle $\cos \frac{1}{2}\gamma$ oder $\sin \frac{1}{2}\gamma$, sowie ob er rechts solle $\sin \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ oder $\cos \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ setzen.

Sind zwei Seiten a, b und ein gegenüberliegender Winkel α gegeben, so ist wieder an die Schreibweise

$$\sin\beta = b \cdot \frac{\sin\alpha}{a}, \quad c = \frac{a}{\sin\alpha} \cdot \sin\gamma,$$

sowie daran zu erinnern, daß die Größe $\frac{a}{\sin\alpha}$ $\left(\text{oder } \frac{\sin\alpha}{a}\right)$ nur ein-

mal berechnet zu werden braucht. — Die Diskussion der Aufgabe für die einzelnen möglichen Fälle, insbesondere die Zweideutigkeit derselben wird am klarsten, wenn man sie mit derjenigen der entsprechenden Konstruktionsaufgabe zusammenstellt und vergleicht. Dieselbe kann außerdem auch übungsweise an die Gleichung

$$c = b \cdot \cos \alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin \alpha^2}$$

geknüpft werden, welche c unmittelbar durch die gegebenen Stücke ausdrückt. Zu numerischen Berechnungen ist dieselbe übrigens selbstverständlich nicht anzuwenden.

Sind die drei Seiten gegeben, so sind für numerische Beispiele die Formeln $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha = \frac{\varrho}{s - a}$, u. s. w. die besten, während sonst der Kosinussatz anzuwenden ist. Daß die Größe

$$\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

hierbei mit dem Radius des dem Dreiecke einbeschriebenen Kreises identisch ist, kann auf die eine oder die andere Art leicht gezeigt werden.

Für die Berechnung des Inhaltes wird man nur die Formeln $F = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \alpha$, $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ und $F = \varrho s$ merken lassen, von denen die bei den letzten rein planimetrischer Art sind. In der Anwendung reicht man mit denselben vollständig aus; sollte einmal eine andere gebraucht werden, so ist sie für den speziellen Zweck besonders abzuleiten.

Es ist zweckmäßig, schon an jeden einzelnen Fundamentalfall einige eingekleidete Aufgaben anzuschließen, in welchen dieser einzelne Fall zu praktischer Anwendung kommt. Von ihnen ist dann der Übergang zu zusammengesetzten Beispielen leicht, bei denen zwei oder mehrere Dreiecke, bezw. Fundamentalaufgaben neben einander gebraucht werden, und für welche verschiedene Gebiete, z. B. die Bestimmung von Höhen oder von Entfernungen unzugänglicher Punkte oder einzelne Probleme der astronomischen Geographie, der Mechanik und der Physik, reichlichen und anregenden Stoff liefern.

Wir unterscheiden hierbei zweckmäßig zwei Gruppen von Aufgaben: Bei der einen sind für alle vorkommenden Dreiecke bis zu dem letzten, welches die gesuchte Größe liefert, die erforderlichen drei Seiten oder Winkel entweder unmittelbar gegeben, oder sie werden mittels der Berechnung eines vorhergehenden Dreiecks bekannt; diese Aufgaben bieten also keine Schwierigkeiten für die Auffindung des zur Lösung führenden Weges. Bei der zweiten Gruppe treten dagegen an die Stelle eines oder mehrerer Bestimmungsstücke Beziehungen zwischen Stücken verschiedener Dreiecke, welche durch eine oder mehrere Gleichungen darzustellen sind, deren Auflösung dann erst zur Kenntnis der einzelnen

Bestimmungsstücke führt. Sind z. B. die gegenseitigen Entfernungen $AB = a$, $BC = b$ dreier in gerader Linie liegenden Punkte A, B, C bekannt, sind ferner an einem seitwärts liegenden Punkte D die Winkel $ADB = \alpha$, $BDC = \beta$ gemessen, und sollen nun die unbekannten Entfernungen $AD = x$, $BD = y$, $CD = z$ berechnet werden, so sind in jedem der Dreiecke ABD, BCD, ACD unmittelbar nur zwei einfache Bestimmungsstücke gegeben. Zu diesen treten aber die Bedingungen, daß BD den Dreiecken ABD und BCD gemeinsam, und daß der Winkel CBD Supplement des Winkels DBA sein muß. Man kann nun für diese und ähnliche Aufgaben den Schülern beispielsweise folgende Anleitung geben:

Man ermittele zunächst eine Seite oder einen Winkel, dessen Bekanntsein die unmittelbare Auflösung zweier Dreiecke (in der Art der Aufgaben der ersten Gruppe) ermöglichen würde. Hierfür könnte man z. B. im vorliegenden Falle den Winkel $DBA = \varphi$ wählen, denn nach dem Bekanntwerden desselben würden in jedem der Dreiecke ABD und BCD eine Seite und zwei Winkel zu Gebote stehen. Man suche nun eine Größe, welche sich vermittels dieser Stücke doppelt berechnen läßt, hier die Seite $BD = y$, setze die beiden sich dafür ergebenden Ausdrücke einander gleich, also hier

$$\frac{a}{\sin\alpha}\sin(\varphi + \alpha) = \frac{b}{\sin\beta}\sin(\varphi - \beta),$$

und man hat nun die Gleichung für jene gewünschte Größe φ, nach deren — früher hinreichend geübten — Auflösung alles Übrige keine Schwierigkeit mehr macht.

Hierher gehört z. B. auch die Pothenotsche Aufgabe, von welcher die vorstehende ein besonderer Fall ist und die Hansensche. Man vgl. auch des Verf. Trig. Aufgabensammlung § 28, Nr. 8, 15, 16, 18.

Alle derartigen Aufgaben führen bereits zu anderen Gebieten hinüber, nämlich dem der Berechnung von Vierecken, sowie dem von Dreiecken aus mittelbaren Bestimmungsstücken. Diese Gebiete sind wegen ihrer größeren Schwierigkeit geeignet, einen zweiten Kursus der ebenen Trigonometrie für eine höhere Klasse zu bilden. Sie sollen deshalb im folgenden eine besondere Besprechung erhalten.

§ 58. Fortsetzung.

b. Mittelbare Bestimmungsstücke.

Läßt man für die zur Berechnung eines Dreiecks gegebenen „Stücke" nicht bloß Seiten oder Winkel desselben, sondern auch anderweite Größen, wie z. B. Höhen, Radien von Berührungskreisen, Transversalen verschiedener Art u. dgl. m., oder auch Summen, Differenzen, Verhältnisse u. s. w. von solchen Bestimmungsstücken zu, so eröffnet sich ein

neues und überaus reiches Übungsfeld. Derartige Aufgaben bedürfen für die Schüler einer sorgfältigen und eingehenden Anleitung, und für diese stellen wir drei verschiedene Methoden auf.

Als erste derselben wählen wir die geometrische: Jeder solchen Aufgabe entspricht eine andere, welche die Konstruktion des Dreiecks aus denselben, aber statt in Zahlen durch Zeichnung gegebenen Bestimmungsstücken verlangt. Die Analysis dieser Konstruktionsaufgaben kann in vielen Fällen in eine Analysis der entsprechenden trigonometrischen Rechnungsaufgaben verwandelt werden, indem man Schritt für Schritt die dort nacheinander mittels Zeichnung von Hilfsfiguren konstruierten Größen ebenso mittels der Berechnung derselben Figuren trigonometrisch ermittelt. Ist also, um ein einfaches Beispiel zu wählen, ein Dreieck aus $a + b = s$, $\alpha - \beta = \delta$ und c zu berechnen, so wird die Analysis etwa folgendermaßen lauten können:

Angenommen, ABC sei das zu berechnende Dreieck, so sind — bei der gebräuchlichen Bezeichnungsweise — wenn man BC um $CD = CA$ verlängert und D mit A verbindet, in dem Hilfsdreiecke BDA die Seiten $BD = s$ und $BA = c$ bekannt. Ferner ist der Winkel BAD gleich $\alpha + \frac{1}{2}\gamma = \alpha + 90^0 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta = 90 + \frac{1}{2}\delta$. Daher kann dieses Dreieck aus zwei Seiten und dem der größeren von ihnen gegenüberliegenden Winkel berechnet werden. Man erhält so den Winkel $CBA = \beta$ und den Winkel BDA, welcher, wie in bekannter Weise zu zeigen, gleich $\frac{1}{2}\gamma$ ist. Es ist nun von dem Dreieck ABC die Seite c nebst den Winkeln β und γ bekannt, und dasselbe kann aus diesen Stücken nach einer Fundamentalaufgabe weiter berechnet werden.

Die zweite Methode, welche wir die analytische schlechthin nennen wollen, verschmäht jede Bezugnahme auf eine Konstruktion und wendet nur das allgemeine Prinzip an: Die Aufgabe enthält Beziehungen zwischen den gegebenen und gesuchten Größen; diese Beziehungen sind durch Gleichungen auszudrücken, und letztere sind dann auf die gesuchten Unbekannten aufzulösen. Bei der vorstehenden Aufgabe könnte man hiernach etwa folgenden Gedankengang einschlagen:

Die Aufgabe liefert in $\alpha - \beta = \delta$ unmittelbar eine Gleichung für die beiden unbekannten Winkel α und β. Um eine zweite Gleichung zwischen denselben zu erhalten, müssen die außerdem gegebenen Stücke c und $a + b$ benutzt werden. Durch Division derselben ergiebt sich

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{2\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma},$$

woraus leicht

$$\frac{s}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma}, \text{ also } \sin\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{c \,.\, \cos\frac{1}{2}\delta}{s}$$

folgt, eine Gleichung, welche übrigens nebst ihrer vorstehenden Ableitung auch so wie so als die eine der Mollweideschen Gleichungen

bekannt sein konnte. Aus $\frac{1}{2}\gamma = 90^0 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ ergeben sich in bekannter Weise α und β, und dann aus c und den Winkeln die noch fehlenden Stücke des zu berechnenden Dreiecks.

Die dritte Methode ist ebenfalls analytisch, unterscheidet sich aber von der vorigen durch die Einführung des Radius r des umbeschriebenen Kreises als Hilfsgröße, welche im Verlaufe der Rechnung wieder eliminiert wird; sie mag deshalb die Methode mit r genannt werden. Der Gedankengang derselben ist folgender:

Hat man irgend eine Aufgabe der Dreiecksberechnung gelöst, und hat man aus den in derselben gegebenen drei Bestimmungsstücken nicht bloß die etwa fehlenden Seiten und Winkel, sondern auch alle jene „mittelbaren" Stücke, welche in den weiteren Aufgaben vorkommen, durch allgemeine Gleichungen berechnet, so kann jede dieser anderen Aufgaben als eine Umkehrung der ersten betrachtet werden. Man hat nur unter den Resultatformeln dieser ersten diejenigen auszusuchen, welche die bei der neuen gegebenen Bestimmungsstücke als gesuchte enthalten, und dieselben rückwärts auf die früher gegebenen Stücke als Unbekannte aufzulösen. Aus diesen letzteren ergeben sich dann wieder alle noch übrigen mittels jener Resultatformeln. Für die Wahl jener an die Spitze zu stellenden Aufgabe empfiehlt sich besonders diejenige, bei welcher der Radius r nebst den Winkeln des Dreiecks gegeben ist, weil hier die Resultatformeln meist symmetrisch ausfallen. Die Anleitung geht also nun speziell dahin, daß man zunächst alle anderweiten Stücke durch r, α, β und γ ausdrückt. Stellt man die hierbei gewonnenen Resultate etwa in eine Tabelle zusammen, und sind nun irgend welche andere Stücke zur Berechnung eines Dreiecks gegeben, so nehme man aus der Tabelle diejenigen Gleichungen, welche die Ausdrücke für diese Stücke liefern, löse dieselben — wenn möglich und unter Hinzuziehung von $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ — auf r, α, β, γ auf und setze die hierbei für letztere erhaltenen Werte in diejenigen Formeln der Tabelle ein, welche die sonst noch verlangten Stücke enthalten.

Sind z. B. eine Seite c, die Summe $a + b$ der beiden anderen Seiten und der Radius ϱ_a desjenigen äußeren Berührungskreises gegeben, welcher einer der letzteren Seiten anbeschrieben ist, so hat man hiernach die drei Gleichungen

$$\varrho_a = 4r \, . \sin \tfrac{1}{2}\alpha \cos \tfrac{1}{2}\beta \cos \tfrac{1}{2}\gamma, \text{*)}$$

$$a + b = 2r(\sin\alpha + \sin\beta) = 4r \, . \cos \tfrac{1}{2}\gamma \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta),$$

$$c = 2r \sin\gamma$$

*) Etwa aus $c = \varrho_a (\cot \frac{1}{2}\alpha - \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta) = \varrho_a \dfrac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta}$

$$= \varrho_a \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta}.$$

auf r und die Winkel aufzulösen. Eliminiert man zunächst r mittels paarweiser Division und führt dann $\frac{1}{2}\gamma = 90^0 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ und $\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}\delta$ als Unbekannte ein, so erhält man

$$\frac{\varrho_a}{c} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\gamma}{2 \sin \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}\gamma} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta}{2 \sin \frac{1}{2}\gamma}$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{2 \sin \frac{1}{2}\gamma} = \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma + \sin \frac{1}{2}\delta}{2 \sin \frac{1}{2}\gamma},$$

$$\frac{a + b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}\gamma} = \frac{\cos \frac{1}{2}\delta}{\sin \frac{1}{2}\gamma}.$$

Hiernach kann man etwa, wie folgt, weiter auflösen:

$$1 = \sin \tfrac{1}{2}\delta^2 + \cos \tfrac{1}{2}\delta^2 = \left(\frac{2\varrho_a}{c} \sin \tfrac{1}{2}\gamma - \cos \tfrac{1}{2}\gamma\right)^2 + \frac{(a+b)^2}{c^2} \sin \tfrac{1}{2}\gamma^2;$$

$$1 = \frac{4\varrho_a^2}{c^2} \sin \tfrac{1}{2}\gamma^2 - \frac{4\varrho_a}{c} \sin \tfrac{1}{2}\gamma \cos \tfrac{1}{2}\gamma + \cos \tfrac{1}{2}\gamma^2 + \frac{(a + b)^2}{c^2} \sin \tfrac{1}{2}\gamma^2;$$

$$\sin \tfrac{1}{2}\gamma^2 = \frac{4\varrho_a^2}{c^2} \sin \tfrac{1}{2}\gamma^2 - \frac{4\varrho_a}{c} \sin \tfrac{1}{2}\gamma \cos \tfrac{1}{2}\gamma + \frac{(a + b)^2}{c^2} \sin \tfrac{1}{2}\gamma^2.$$

Da die Wurzel $\sin \frac{1}{2}\gamma = 0$ durch die Natur der Aufgabe ausgeschlossen ist, so kann man alle Glieder der letzten Gleichung durch $\sin \frac{1}{2}\gamma^2$ dividieren. Man erhält

$$1 = \frac{4\varrho_a^2}{c^2} - \frac{4\varrho_a}{c} \cot \tfrac{1}{2}\gamma + \frac{(a + b)^2}{c^2}, \text{ also}$$

$$\cot \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{4\varrho_a^2 + (a + b)^2 - c^2}{4c\varrho_a}.$$

Wie man, nachdem hierdurch γ berechnet ist, weiterhin mittels einer der vorhergehenden Gleichungen δ, dann α und β, $2r = c : \sin \gamma$, $a = 2r \sin \alpha$ u. s. w. findet, bedarf nun keiner Erläuterung mehr.

Zur Vergleichung mag dieselbe Aufgabe hier auch nach den beiden anderen Methoden behandelt werden:

Es sei ABC das gesuchte Dreieck, O_a der Mittelpunkt des fraglichen Berührungskreises, O_aD senkrecht auf AB (d. h. deren Verlängerung), so ist $O_aD = \varrho_a$, $AD = \frac{1}{2}(a + b + c)$ und $\sphericalangle O_aAD = \frac{1}{2}\alpha$. Man erhält daher aus dem rechtwinkeligen Dreieck O_aDA ohne weiteres

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha = 2\varrho_a : (a + b + c).$$

Ebenso ist das rechtwinkelige Dreieck O_aBD, in welchem $\sphericalangle BO_aD = \frac{1}{2}\beta$ ist, durch $O_aD = \varrho_a$ und $DB = \frac{1}{2}(a + b - c)$ bestimmt, also

$$\cot \tfrac{1}{2}\beta = 2\varrho_a : (a + b - c).$$

Durch die Kenntnis von c, α und β ist die Aufgabe bereits auf einen Fundamentalfall zurückgeführt.

Will man ohne Vermittelung einer Konstruktion Gleichungen zwischen gegebenen und gesuchten Stücken aufstellen, so kann man etwa zunächst die Seiten a und b als Unbekannte ansehen, für welche durch den Wert von $a + b$ bereits eine Gleichung gegeben ist. Man hat dann noch eine zweite zwischen ϱ_a, a, b und c aufzustellen. Ist hierzu schon die folgende

$$\varrho_a = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$$

bekannt oder etwa aus $F = \varrho_a (s - a)$ abgeleitet, so erhält man, wenn man der Abkürzung halber noch $a + b$ mit f, $a - b$ mit x bezeichnet,

$$4\,\varrho_a^2 = \frac{(f+c)(x+c)(f-c)}{c-x},$$

und hieraus

$$x = c \cdot \frac{4\,\varrho_a^2 - (f^2 - c^2)}{4\,\varrho_a^2 + (f^2 - c^2)}.$$

Mittels $a - b$ und $a + b$ findet man nun in bekannter Weise die Werte für a und b unmittelbar durch die gegebenen Stücke ausgedrückt. Die Winkel können dann aus den drei Seiten gefunden werden.

Selbstverständlich kann man zur analytischen Auflösung auch andere Gleichungen benutzen, und auch zunächst die Winkel berechnen, wodurch man zu denselben Resultaten wie bei den vorhergehenden Methoden gelangt.

Darüber, ob man im Unterricht nur eine einzige dieser Methoden oder mehrere lehren solle und welche von ihnen den Vorzug vor den anderen verdiene, ist viel gestritten worden, zum Teil wohl deshalb, weil man dabei von verschiedenen Standpunkten ausging. Jede der drei Methoden hat ihre Vorzüge: die geometrische läßt den Zusammenhang der einzelnen Größen anschaulich hervortreten und bietet für den Schulunterricht die Gelegenheit zur Wiederholung eines anderen Gebietes, von welchem der Schüler hier in anregender Weise einen neuen Gebrauch macht. Sie stellt aber bei verwickelteren Aufgaben nicht selten zu hohe Ansprüche an die Findigkeit des Schülers, zumal sie sich nicht allen Methoden der geometrischen Konstruktionen gleich bequem anpaßt. In solchen Fällen also, wo die Auffindung der Konstruktion für die Schüler zu schwer ist, während die Rechnung mit bekannten Formeln und nach bekannten Regeln denselben leicht fällt, ist eine analytische Methode vorzuziehen.

Von diesen hat diejenige mit der Hilfsgröße r den Vorzug, daß sie die Ausführung in ein Schema bringt, zu dessen Anwendung auch schwächere Schüler befähigt werden können. Damit verliert sie aber zugleich an bildender Kraft, indem sie mechanischer als die anderen

Methoden wird. Auch gewinnt sie die von ihr dargebotene Ersparnis an Denkarbeit nur auf Kosten der Weite des Weges, denn die Einführung der nachher wieder wegfallenden Hilfsgröße r ist gegenüber der unmittelbaren Aufstellung der nötigen Gleichungen ein Umweg.

Sieht man ganz von der Frage nach den bildenden Momenten ab, die — was man nicht immer gehörig beachtet zu haben scheint — für den Schulunterricht die wichtigste ist, und fragt bloß, welche Methode die beste zu rascherer oder sicherer Erreichung des Resultats sei, so kann man auch bei dieser engeren Begrenzung keiner den unbedingten Vorzug geben. Man findet Aufgaben, bei denen die geometrische Methode am kürzesten und einfachsten zum Ziele führt, indem sie gestattet, die besten Resultatformeln sozusagen fast unmittelbar aus der Figur abzulesen. In anderen Fällen führt sie dagegen zu Weitläufigkeiten, welche der Überblick über angesetzte Gleichungen mit Leichtigkeit beseitigt, aber die Auffindung dieser Gleichungen ist in schwierigeren Fällen dem Schüler nicht hinreichend gesichert; daß sie diesen letzteren Übelstand beseitigt, ist der alleinige Vorzug der dritten Methode. Endlich ist auch der Umstand zu beachten, daß die verschiedenen Methoden häufig die einzelnen Unbekannten in verschiedener Reihenfolge liefern, und zwar derart, daß die späteren mit Hilfe der vorher gefundenen berechnet, also nicht unmittelbar durch die gegebenen ausgedrückt werden. Es ist schon früher darauf hingewiesen worden, daß dies letztere gefordert sein kann. Wer also z. B. die obige Aufgabe $a + b$, c, ϱ_a zu lösen hat und bloß die Winkel zu wissen wünscht, wird sich am besten der geometrischen Methode bedienen; wer dagegen die Seiten a und b unmittelbar durch die gegebenen Stücke auszudrücken verlangt, wird das oben ausgeführte analytische Verfahren vorziehen.

Wenn man als den Zweck dieser Unterrichtspartie für die Schule weniger die Befähigung zu rascher und sicherer Erreichung der Resultate der Aufgaben als die allgemeinere Ausbildung der geistigen Kraft der Schüler ansieht, und wenn man zugiebt, daß dieser Ausbildung gerade die Behandlung des Gegenstandes auf verschiedenen Wegen und von verschiedenen Seiten förderlich, mindestens die letztere wertvoller sei, als die Erlangung einer gewissen Routine in der Lösung der Aufgaben, dann wird man wohl der Ansicht folgen dürfen, daß nur bei dem Mangel der erforderlichen Zeit, oder bei einem sehr schwach befähigten, durch eine Mehrzahl von Methoden vielleicht zu „verwirrenden" Schülermaterial eine Beschränkung auf eine einzelne Methode erfolgen solle. Für diese kann je nach den Umständen die geometrische oder die analytische mit r gewählt werden. Wo aber solche Hindernisse nicht vorliegen, da wird man alle drei Methoden lehren, wobei die geometrische in ihrer Anwendung auf solche Aufgaben, bei denen die Konstruktion durch naheliegende Hilfsfiguren erfolgt, leicht genug ist, um schon an den ersten Kursus der Trigonometrie angeschlossen, also z. B. im Gymnasium schon in Obersekunda durchgenommen zu

werden; die anderen Methoden verbleiben wohl besser der Prima des Gymnasiums, bezw. den entsprechenden Klassen der Realanstalten.

Eine nähere Anleitung zu diesem Abschnitt des Unterrichts nebst hinreichendem Übungsmaterial findet man in des Verfassers Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie, Leipzig bei B. G. Teubner, § 27, zum Teil auch in Gallenkamp, Sammlung trigonometrischer Aufgaben, Berlin, Plahn. Die Methode mit der Hilfsgröße r ist ausschließlich und in ganz außerordentlich eingehender und reichhaltiger Weise behandelt in Lieber und v. Lühmann, Trigonometrische Aufgaben, Berlin, Simion. Man vergleiche auch des Verf. Aufsatz in Hoffmanns Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht VII, S. 1.

An das im vorstehenden besprochene Übungsgebiet läßt sich zunächst als ein zweites die trigonometrische Analysis von Konstruktionsaufgaben als eine Art von Umkehrung desselben anschließen. Jene vorher erwähnten Fälle, in welchen auf die Anwendung der „geometrischen Methode" zur Berechnung von Dreiecken aus mittelbaren Bestimmungsstücken wegen der Schwierigkeit, die entsprechende Konstruktion zu finden, verzichtet wurde, führen auf den Gedanken, umgekehrt die auf analytischem Wege gewonnenen Rechnungsresultate zur Auffindung der Auflösung der entsprechenden Konstruktionsaufgabe zu benutzen. Es handelt sich hierzu im wesentlichen nur darum, die Resultatformeln geometrisch zu deuten und darnach das Verfahren der Zeichnung zu entwickeln, in ähnlicher Weise wie bei der „algebraischen Analysis" planimetrischer Konstruktionsaufgaben (§ 47), welcher sich also diese trigonometrische als Ergänzung anschließt. — Die Nützlichkeit dieses neuen Gebietes liegt auf der Hand, denn auf demselben wird in dem Ansetzen und Auflösen von Gleichungen mit mannichfaltigen algebraischen Umformungen ein großer und wesentlicher Teil des arithmetischen Unterrichtspensums, dann in der Angabe der Konstruktionen ein solcher des planimetrischen und außerdem fast der ganze vorausgegangene Inhalt der Trigonometrie zur Anwendung gebracht. Wegen der damit verknüpften Wiederholungen unter neuen, anregenden Gesichtspunkten ist also dieses Gebiet besonders zu einem gewissen Abschluß des Vorhergegangenen geeignet. Als obligatorisch wird man es jedoch nicht betrachten.

Eine nähere Anleitung für dasselbe mit einer hinreichend großen Auswahl geeigneter Einzelaufgaben findet man in dem Schriftchen des Verfassers: „Die trigonometrische Analysis planimetrischer Konstruktionsaufgaben. Leipzig, B. G. Teubner."

Die Auflösung trigonometrischer Vierecksaufgaben kann ebenfalls als Fortsetzung der ebenen Trigonometrie im engeren Sinne herangezogen werden, doch bieten sich hier zu wenig wesentlich neue Momente, um im allgemeinen große Geneigtheit zu veranlassen, für die zum Teil verhältnismäßig weitläufigen Rechnungen viele Zeit zu opfern. Wer

anderer Ansicht ist, findet sehr reichliches Material in den schon erwähnten trigonometrischen Aufgaben von Lieber und von Lühmann. Auch ein Kursus der Polygonometrie im engeren Sinne dürfte über die Zwecke der Schule hinausgehen.

Unter den Aufgabensammlungen für Trigonometrie überhaupt ist außer den schon genannten noch zu erwähnen: Hermes, Sammlung von mathematischen Aufgaben, dritter Teil: Goniometrie und Trigonometrie. Berlin, Winckelmann.

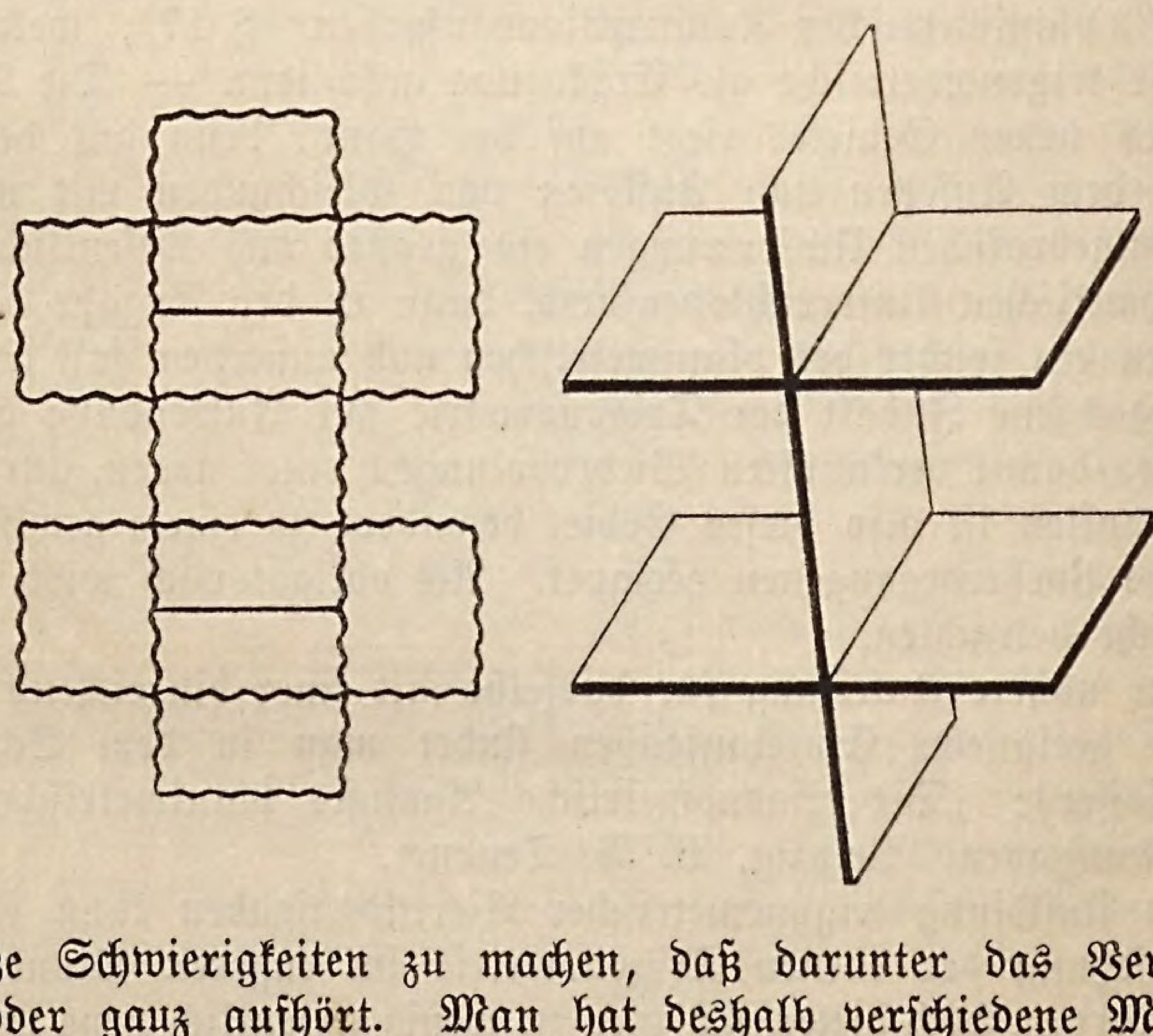
---

7. Kapitel.

Die Stereometrie.

§ 59. Die Hilfsmittel der Anschauung.

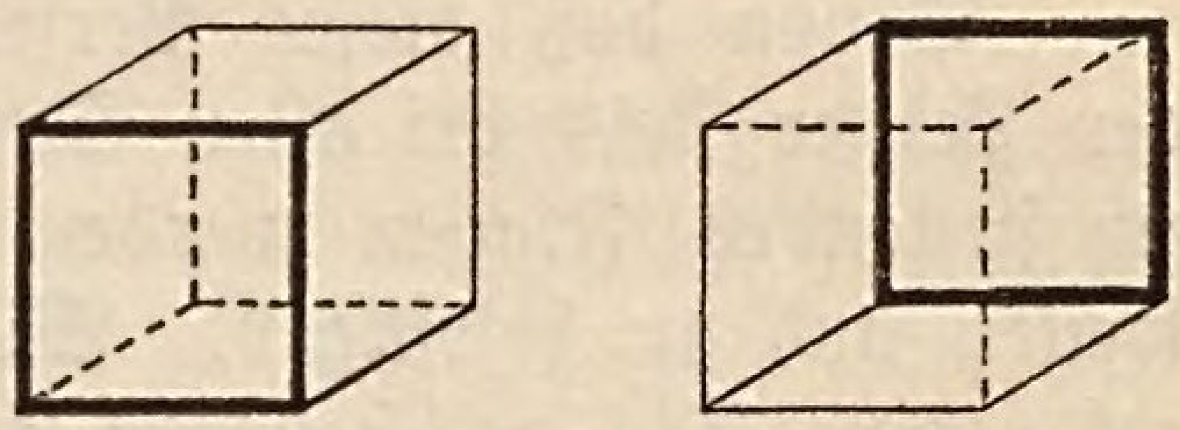
Bei dem Beginne des stereometrischen Unterrichts tritt eine bis dahin noch nicht dagewesene Schwierigkeit auf: die zur Erläuterung dienenden Figuren erstrecken sich nach den drei Dimensionen und können daher nicht in ihrer wirklichen Gestalt in der Zeichenebene dargestellt werden. Die Schüler haben also die nach irgend einer der perspektivischen Methoden entworfenen Zeichnungen als räumliche anzuschauen, und dies scheint ihnen nach der Erfahrung vieler Lehrer nicht selten



so große Schwierigkeiten zu machen, daß darunter das Verständnis leidet oder ganz aufhört. Man hat deshalb verschiedene Mittel zur Abhilfe, namentlich Modelle, und selbst die Anwendung des Stereoskops empfohlen. Nach der Erfahrung des Verfassers reicht ein sehr ein-

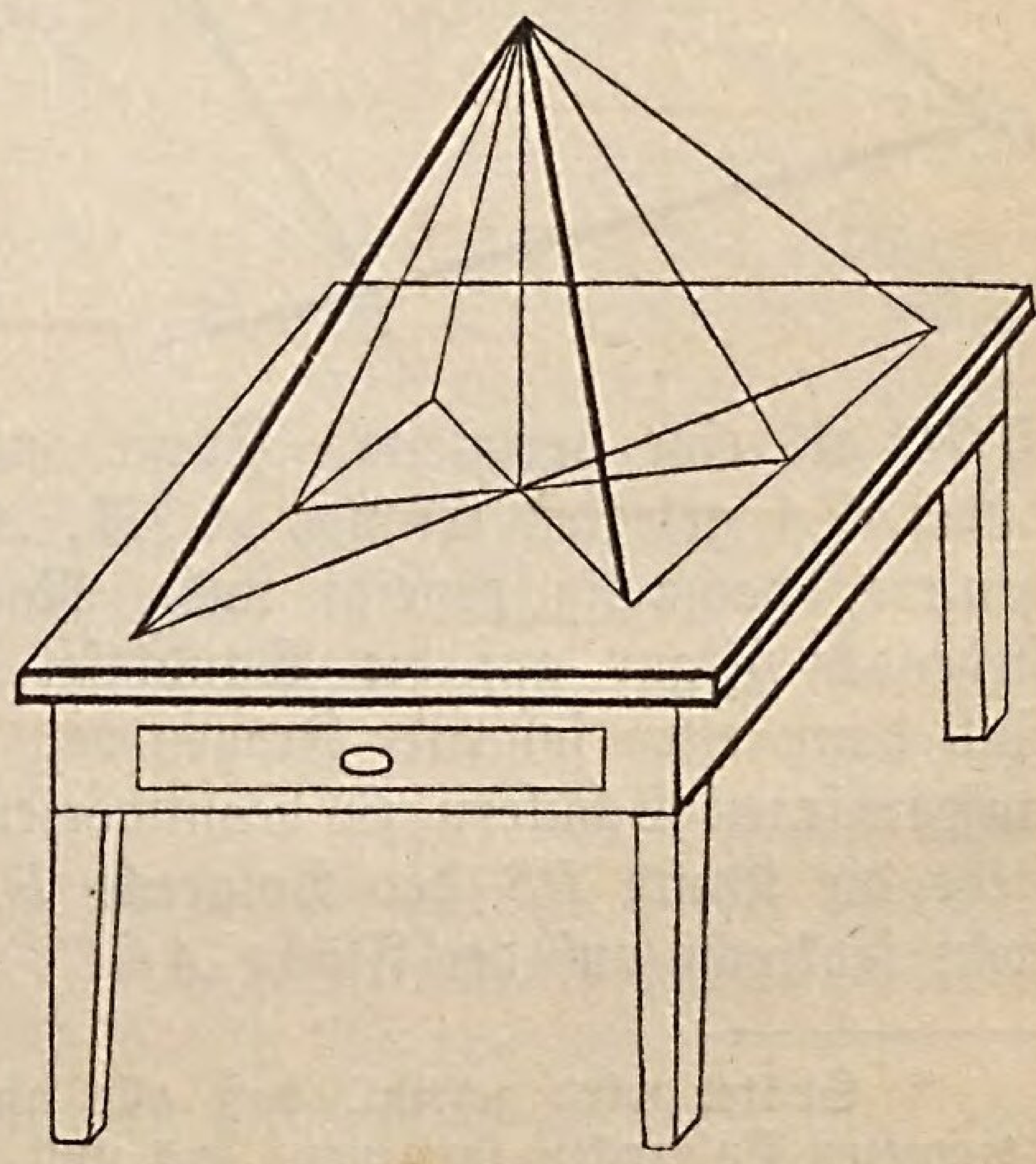
facher Kunstgriff hin, den Übelstand vollständig zu beseitigen; derselbe besteht darin, daß man die Linien der Figur um so dicker zeichnet, je näher sie dem Auge des Beschauers gedacht werden sollen. Man vergleiche z. B. die beiden, den Zeichnungen zweier verschiedenen Lehrbücher entnommenen, vorstehenden Figuren, welche zwei parallele Ebenen darstellen, die von einer dritten geschnitten werden, und die Art des (übrigens allbekannten und leicht erklärlichen) Kunstgriffes, sowie seine Zweckmäßigkeit wird sofort einleuchten. Zu bemerken ist noch, daß Linien, welche durch andere Teile der Figur verdeckt sind, falls erforderlich ist, sie sichtbar zu machen, am besten punktiert oder gestrichelt gezeichnet, anderenfalls aber, wie in der zweiten vorstehenden Figur, ganz weggelassen werden.

Den Erfolg dieses einfachen Hilfsmittels zeigen z. B. auch die beiden nebenstehenden Zeichnungen eines Würfels, welche als planimetrische Figuren betrachtet, einander kongruent sind, durch die stärkere Zeichnung der einen Fläche, bezw. die Punktierung der nicht sichtbaren Kanten aber als zwei verschiedene Ansichten desselben Körpers erscheinen.



Als vorteilhafte Projektionsmethode für die einfachen Figuren der Stereometrie empfiehlt sich die der Parallelprojektion, also diejenige, bei welcher das Auge in unendlicher Entfernung gedacht wird. Dadurch daß bei derselben, im Gegensatz zur schiefen Projektion, parallele Gerade des Raumgebildes auch in der Zeichnung parallel bleiben, wird die Anfertigung der letzteren sehr erleichtert.

Um die Darstellung einer Ebene durch vier, dieselbe in der Gestalt eines Parallelogramms begrenzende Gerade für den Anfänger noch klarer zu machen, darf man selbst Kunstgriffe nicht verschmähen, wie den, in der ersten derartigen Figur, welche vorkommt, die horizontal gedachte Ebene als obere Fläche einer Tischplatte, wenn auch nur ganz flüchtig und roh darzustellen, etwa wie in nebenstehender Zeichnung.

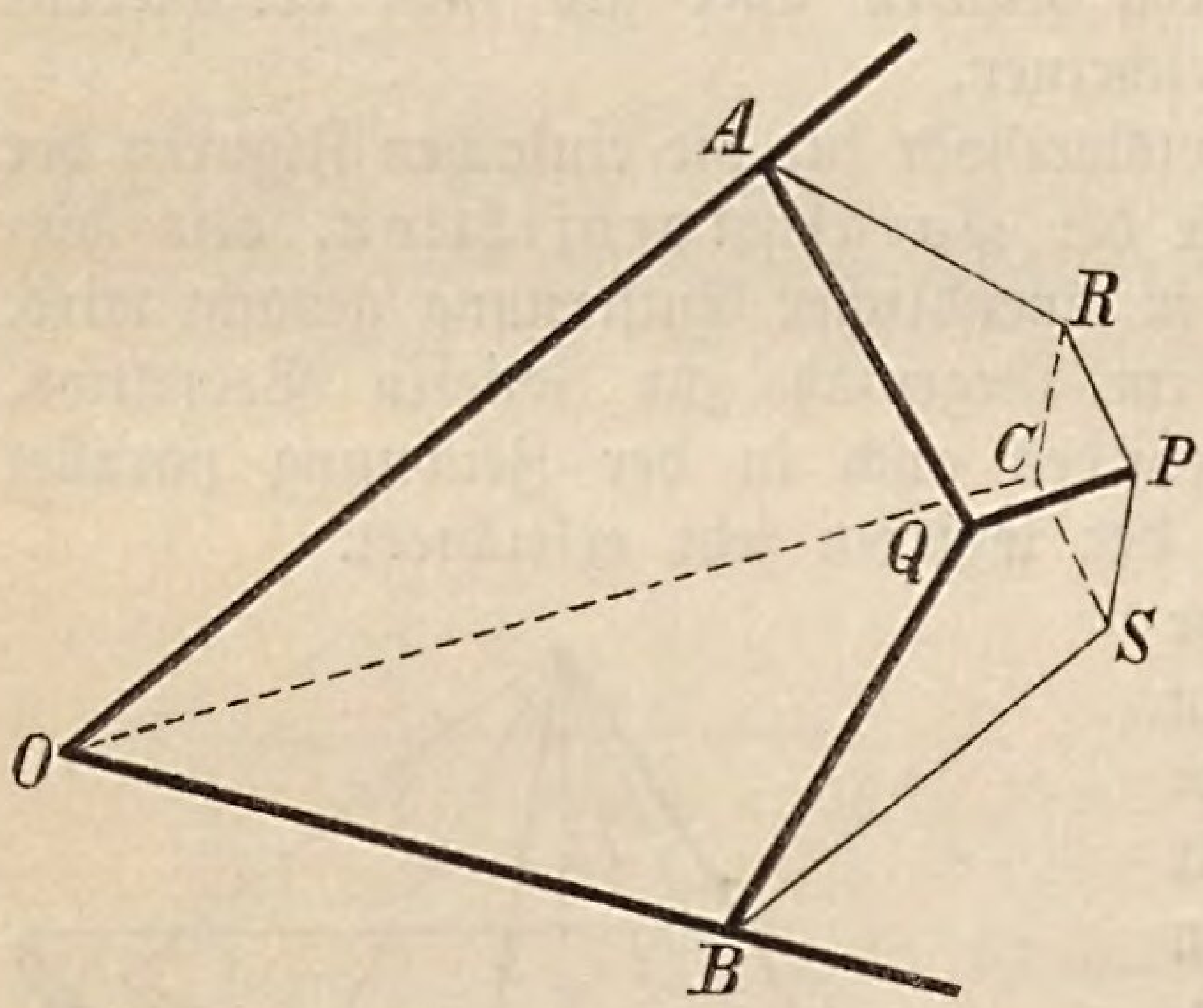


Unter Umständen kann auch die Hinzufügung einer oder mehrerer ebenen Schnittfiguren zu der Darstellung eines Körpers die Deutlichkeit derselben vermehren. Derartige Hilfsmittel reichen selbst bei der Vorführung krummer

Flächen, wenigstens der einfachen, die in der Stereometrie überhaupt vorkommen, hin; eine Kugelfläche z. B. wird durch einen in der Zeichenebene gedachten größten Kreis als Umriß und einige nach vorne allmählich stärker gezeichnete Schnittkreise hinreichend deutlich veranschaulicht. Daß man hier und da den räumlichen Eindruck durch einige schattierende Striche verstärken kann, ist selbstverständlich.

Mit diesen Hilfsmitteln, die durchaus keiner besonderen Kunstfertigkeit und keiner langen Vorbereitung bedürfen, ist dem Verfasser während einer dreißigjährigen Praxis nur ein einziger Schüler vorgekommen, welcher erklärte, die Figuren nicht als stereometrische sehen zu können, und auch dieser lernte dies nach einigen Übungen sogleich und bewies sein Verständnis, wie alle übrigen, durch die sichere Beantwortung bezüglicher Fragen.

Davon daß dieses Verständnis vorhanden ist, muß sich freilich der Lehrer stets bei allen Schülern überzeugen. Die zu diesem Zwecke zu stellenden Fragen werden außerdem dazu beitragen, dasselbe zu wecken und zu befestigen. Wie dies geschehen kann, möge ein Beispiel erläutern: Die nachstehende Figur hat den Zweck, den Begriff und die Eigenschaften einer Polarecke zu entwickeln. Dieselbe sei zunächst definiert worden als eine solche Ecke, deren Scheitel P innerhalb des Raumes der ursprünglichen Ecke O liegt, und deren Kanten bezüglich senkrecht zu den Flächen der ursprünglichen sind.*) Die Schüler sind schon früher darin geübt worden, sich die Ecke O bloß aus ihren Kanten OA, OB, OC räumlich vorstellen zu können, und z. B. BOC als eine horizontale Ebene anzusehen, gegen welche die beiden durch OA gelegten Ebenen AOB, AOC, jene als vordere, diese als hintere, dachartig geneigt sind. Nach erfolgter Zeichnung der vorstehenden Figur auf die Wandtafel, bezw. schon während derselben, sind dann etwa folgende Fragen von den einzelnen, in raschem Wechsel aufgerufenen Schülern zu beantworten: Auf welcher Ebene der Ecke O steht die Kante PS der Polarecke P senkrecht? Welche Kante von P steht senkrecht auf der Fläche AOC? Welche auf AOB? Welches sind



*) Später wird gezeigt, daß alle auf diese Art zu derselben Ecke O gezeichneten Polarecken kongruent sind und daher, da es bei den in Rede stehenden Eigenschaften der letzteren auf die Lage nicht ankommt, als identisch betrachtet werden können. Zum Schluß wird dann der Scheitel P in den Scheitel O selbst verlegt, u. s. w.

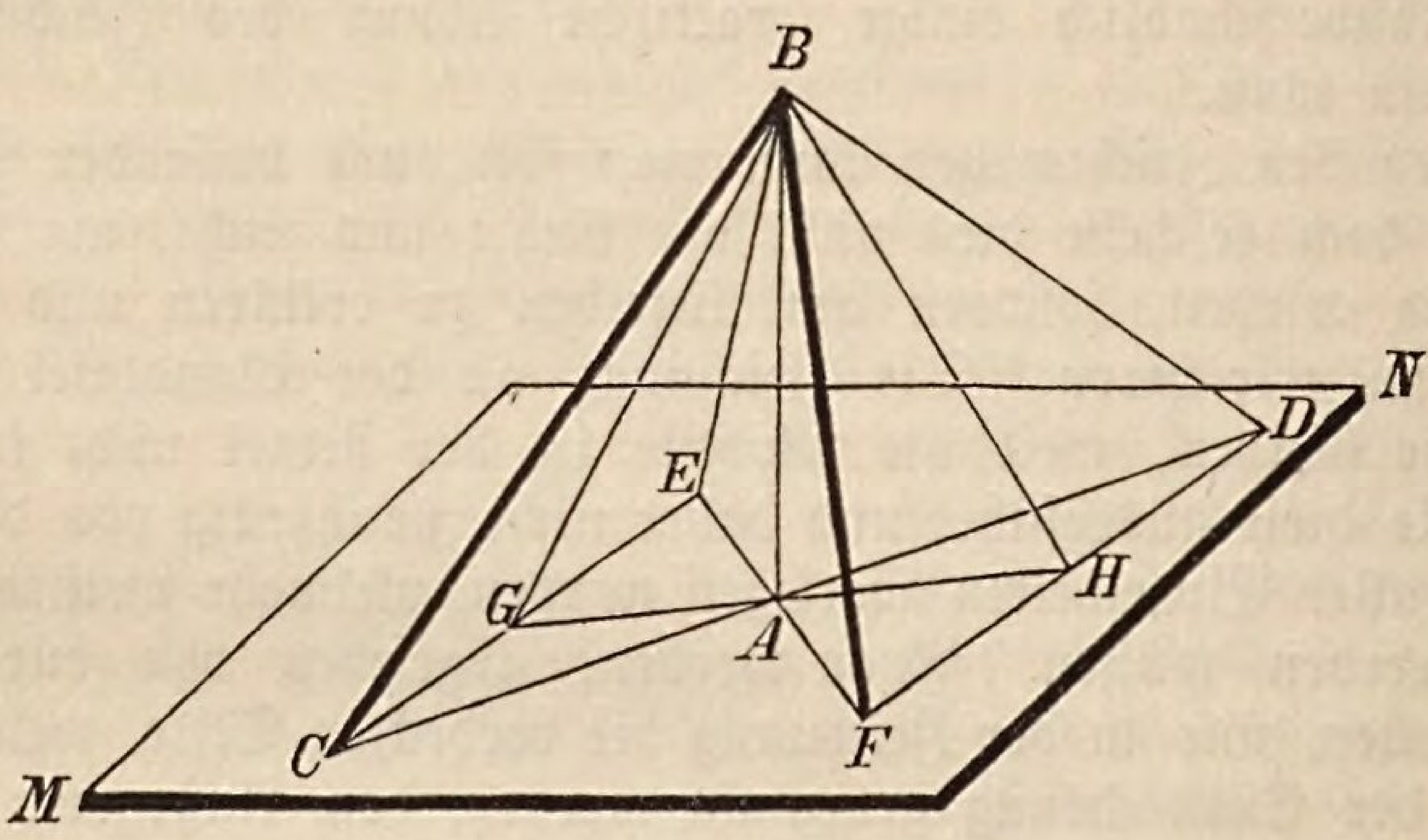
die drei Ebenen von P? Welche dieser Ebenen schneidet die Kante OA? Wie heißen ihre Durchschnittslinien mit den betreffenden Ebenen von O? Entsprechende Fragen können für die beiden anderen Ebenen von P gestellt werden, ebenso über die Durchschnittslinien einer Ebene von O mit zwei Ebenen von P, u. s. w. Diese Fragen werden so lange fortgesetzt oder wiederholt, bis der Lehrer überzeugt ist, daß die Figur verstanden wird. In den meisten Fällen wird dies in ganz kurzer Zeit erledigt sein, ja man muß sich hüten, durch überflüssige Ausdehnung solcher Übungen langweilig zu werden. Auch auf die Zeichnung der Figuren mit Kreide an der Wandtafel braucht man nicht viele Zeit zu verwenden; Verfasser zeichnet in der Prima stets aus freier Hand, weil dies am rascheſten geht und hier vollständig hinreicht, wobei jedoch selbstverständlich einige praktische Übung des Zeichners vorhanden sein muß.

Neben den Zeichnungen kann man sich auch passender Modelle bedienen, doch geschehe dies nicht als Regel und nicht, um die Zeichnungen zu ersetzen, sondern um dieselben zu erklären und ihr Verständnis zu erleichtern. Die Zeichnung an der Wandtafel muß die Hauptsache bleiben, weil die Modelle in der Regel nicht in gleicher Größe wie diese ausgeführt und daher nicht gleichzeitig von der ganzen Klasse in allen Einzelheiten übersehen werden, vielmehr meistens herumgezeigt werden müssen. Auch werden, abgesehen von durchsichtigen Glasmodellen, nur in der Zeichnung die verdeckten Teile, welche gleichwohl in der Entwickelung gebraucht werden, dem Auge mit den nicht verdeckten zugleich sichtbar gemacht. Ein allzu ausgedehnter Gebrauch von Modellen aber verwöhnt das Auge und entzieht der Übung in der richtigen Anschauung der Zeichnungen die Gelegenheit.

Die Modelle sollen ferner möglichst einfach sein und, wo es angeht, nicht fix und fertig mit allen Hilfslinien und Hilfsebenen vorgeführt werden, sondern entsprechend der Entwickelung des jeweiligen Beweises vor den Augen der Schüler entstehen. Durch einfaches Falten geeigneter Papierstücke, Zusammenstellung eines aufgeklappten Buches mit der Tischfläche, durch einen in geeigneter Lage gegen ein oder mehrere Blätter von Pappdeckel oder Papier gehaltenen Beistift u. dgl. m. lassen sich manche räumliche Beziehungen und Lehrsätze, z. B. über körperliche Ecken, veranschaulichen. Aus einem Apfel, einer Kartoffel oder einem Thonklumpen läßt sich mit dem Messer ein dreiseitiges Prisma schneiden, welches dann vor den Augen der Schüler durch zwei Schnitte in drei gleich große Pyramiden zerlegt wird. Auch in Fällen, wo sorgfältiger ausgeführte, mehr oder minder fertige Modelle wünschenswert sind, können dieselben häufig von Lehrern oder Schülern selbst angefertigt werden, wie z. B. bei den Sätzen über die Lage von Linien gegen Ebenen und bei den regelmäßigen Polyedern. Gerade in diesen Fällen können geeignete Modelle erwünscht sein. Die ersteren pflegen die Anfangspartien des Unterrichts zu bilden, und bei ihnen

gilt es also die ersten Schwierigkeiten der Anschauung zu überwinden. Hier kann ein starker Pappdeckel, vielleicht die Decke eines alten Schülerheftes, auf dessen mit weißem Papier überzogene Fläche die nötigen ebenen Figuren gezeichnet werden, zur Darstellung einer Ebene in verschiedenen Lagen dienen; besser ist freilich ein dünnes Holzbrettchen, welches ein Schüler, der mit Laubsägearbeiten vertraut ist, leicht in geeigneter Gestalt und Größe herstellen wird. Gerade Linien werden durch Strickstöcke oder besser durch Drähte aus weichem Eisen, sowie durch Fäden dargestellt.

Als ein Beispiel für eine derartige Selbstanfertigung von Modellen wähle ich die Darstellung der nachstehenden Figur durch ein solches.

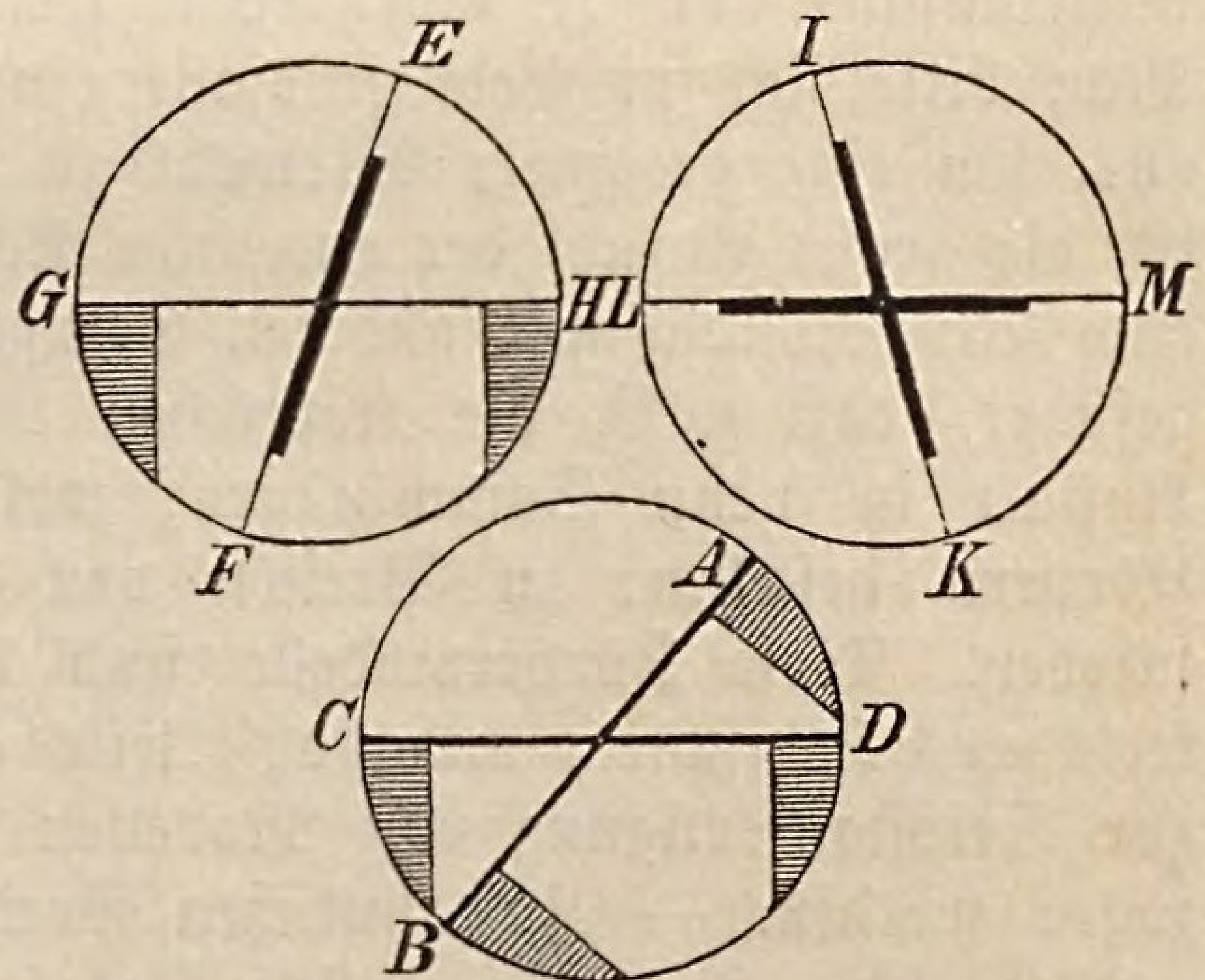


Dieselbe gehört zu einem bekannten Beweise des Satzes, daß jede zu zwei Geraden einer Ebene senkrechte Gerade auch zu jeder dritten durch ihren Fußpunkt gehenden Geraden dieser Ebene senkrecht steht. Die Ebene MN wird durch ein Brettchen dargestellt, auf dessen oberer Fläche die Figur $CGEADHF$ gezeichnet ist. In den mit Buchstaben bezeichneten Punkten werden mittels einen feinen Bohrers kleine Löcher durch das Brettchen gebohrt, durch das Loch in A wird ein Eisendraht gesteckt, dem man durch Abkneifen mit einer Kneipzange die gewünschte Länge gegeben hat. Das durch A gesteckte Ende desselben wird mit einer Drahtzange nach oben umgebogen und dann mit dem Hammer in das Holz eingeschlagen, sodaß der Stift AB senkrecht zur Ebene MN steht. Das Ende bei B wird mit der Drahtzange zu einem kleinen geschlossenen Ring umgebogen. Dann zieht man mittels einer Packnadel einen hinreichend starken Faden, am besten von weißer oder roter Farbe durch C, sodaß ein Knoten unterhalb C das Durchschlüpfen verhindert, und führt dann nach einander den Faden durch das Öhr bei B, durch D, unter dem Brett nach H, von da wieder nach B und so fort nach G, E, B, F, und knüpft ihn hier an dem Knoten bei C fest. Um das Feststehen des Modells trotz des umgeschlagenen Drahtendes zu erleichtern, kann man unter den Ecken

des Holzbrettchens vier kleine, gleichdicke Holzplättchen mit Tischlerleim ankleben oder mit kurzen Drahtstiften annageln.

Die Anfertigung von Netzen und Modellen von Körpern aus Pappe kann als allgemein bekannt vorausgesetzt werden und wird schon früher im krystallographischen Unterricht geübt sein. Einzelne Schüler pflegen solche Modelle mit besonderer Liebhaberei und mit hinreichender Genauigkeit und Sauberkeit anzufertigen und wohl auch besonders gelungene große Exemplare der Anstaltssammlung zu dauerndem Besitz zu überweisen. Recht hübsch sind auch Modelle aus Glastafeln, welche in ihrem Innern mittels farbiger Fäden die in Frage kommenden wichtigeren Linien, z. B. die vier Höhen eines Tetraeders oder die Diagonalachsen eines Würfels veranschaulichen. Wer die Mühe nicht scheut, kann sich solche selbst anfertigen, indem er sich die Glastafeln vom Glaser nach vorgezeichneten Papiermustern schneiden läßt und dieselben mittels einer Mischung von Kreide und Wasserglas oder auch mittels schmaler farbiger Papierstreifchen zusammenkittet.

Andere Modelle, z. B. für die Sphärik, verfertigt mau sich aus Scheiben von dünner Kartonpappe. Man schneide z. B. aus solcher drei gleichgroße Kreise aus und ziehe in jedem der letzteren zwei Durchmesser, welche einander unter je einem der ebenen Winkel der gewünschten Ecke schneiden. Man schneide dann diejenigen Teile dieser Durchmesser in den Kartons durch, welche in den nebenstehenden Figuren durch stärkere Striche bezeichnet sind. Man klappe dann die bei *A* und *B* des ersten Kreises an den von außen eingeschnittenen Stellen schattierten Kartonteile um und schiebe die so verschmälerte Hälfte durch den bei *EF* geschnittenen Spalt des zweiten Kartons. Die umgebogenen Teile werden dann wieder aufgerichtet. Ebenso biege man sodann die schattierten Teile bei *C*, *D* und *G*, *H* um, schiebe den dritten Karton mit den beiden Schlitzen *IK* und *LM* über die so verschmälerten Hälften und richte darauf die umgebogenen Teile ebenfalls wieder auf. Man erhält so das Modell eines sphärischen Dreiecks mit den übrigen Dreiecken, in welche die Kugelfläche durch die erweiterten Ebenen des ersten geteilt wird, und mit den zugehörigen Ecken am Mittelpunkte.



Das Modell einer geraden Cylinderfläche liefert ein beliebiges rechteckiges Papierblatt, welches so zusammengerollt wird, daß zwei Gegenseiten des Rechtecks zusammenfallen, bezw. mit einem Klebstoffe über einander befestigt werden. In ähnlicher Weise fertigt man das

Modell einer geraden Kegelfläche mittels eines aus Papier geschnittenen Kreissektors. Ein Ausschnitt eines entsprechend konstruierten Kreisrings führt zur Mantelfläche eines geraden Kegelstumpfs.

Wer sich nicht die Zeit oder Mühe nehmen kann, in dieser oder ähnlicher Weise Modelle selbst zu fertigen, kann solche nach Bedarf käuflich erwerben oder von einem Handwerker nach genauen Angaben anfertigen lassen. Dies wird sogar in einzelnen Fällen notwendig sein, so z. B. wenn man die verschiedenen Arten der ebenen Schnitte eines Kegels mittels eines entsprechend durchschnittenen Holzmodells veranschaulichen will. Ein geschickter Kunsttischler wird die Anfertigung übernehmen müssen, wenn man nicht vorzieht, das Modell fertig aus einer Lehrmittelhandlung zu beziehen.

Die Stroeßerschen Modelle*) aus verzinktem Draht sind für viele Fälle recht brauchbar; in der Körperlehre haben sie vor den gewöhnlichen Pappmodellen den Vorzug, daß sie sozusagen nur das Gerippe des Körpers an Kanten und Ecken darstellen und deshalb auch das Innere desselben sichtbar und zugänglich lassen. Fängt man die mittels einer nicht zu ausgedehnten, aber hellen Flamme im verdunkelten Zimmer erzeugten Schatten dieser Modelle in verschiedenen Stellungen auf einem Schirme auf, so erhält man eine recht anschauliche Darstellung perspektivischer Abbildungen der betreffenden Körper.

Eine sehr reichhaltige Auswahl von Modellen liefert die Lehrmittelanstalt von J. Ehrhard & Co. in Bensheim a. d. Bergstraße. Man bitte sich im Bedürfnisfalle ein Specialverzeichnis von derselben aus, um eine geeignete Auswahl zu treffen, da es hier nicht möglich ist, die große Anzahl der einzelnen Katalognummern aufzuführen. Um eine Vergleichung mit anderen Bezugsquellen zu ermöglichen, sei angeführt, daß z. B. die Köppschen Körpermodelle von der genannten Anstalt in neun Sammlungen, welche aus 10 bis 360 einzelnen Körpern bestehen, zu Preisen von *M* 6,50 bis *M* 360 geliefert werden. Diese Körpermodelle sind teils massiv aus Birnbaumholz, teils aus Weißblech und hohl, teils aus Draht gefertigt. Auch Netze zur Selbstanfertigung von Modellen aus Pappe können von dort bezogen werden. — Zu ähnlichen Preisen sind auch z. B. bei Leppin und Masche, Berlin S., Alte Jakobsstraße 83, folgende Modelle zu haben: Kegel von Holz, zerschnitten um Hyperbel, Parabel und Ellipse zeigen zu können, *M* 4; stereometrische Körper von Holz, in Kistchen, enthaltend 10 bis 82 Körper im Preise von *M* 7,50 bis *M* 97,50; desgleichen von Birnbaumholz, enthaltend 15 zum Teil zerlegbare Körper in Kasten, *M* 30; desgleichen von Messingdraht, Sammlung von 37 Stück in Kästchen, *M* 40. — Die Firma C. Gerhardt in Bonn a. Rh. liefert die sechs regelmäßigen Körper in Holzkasten für

*) Somatakanten, neues System von Modellen, von J. P. Stroeßer, Prof. der Mathematik in Brüssel.

3 *M*. Außerdem werden als Bezugsquellen genannt die „Leipziger Lehrmittelanstalt (Dr. O. Schneider)," ferner die „allgemeine Lehrmittelanstalt von Vetter (vormals Hestermann), Hamburg, gr. Bleichen 32," welche z. B. Körper von Holz und Netze zu Körpern liefert.

Veränderliche Fadenmodelle, welche zum Teil weitergehenden Zwecken dienen, sind von Plaßmann-Warendorff und von Hänig-Dessau konstruiert worden. Man findet Beschreibungen derselben in der Zeitschr. für math. und naturw. Unterricht XVI, S. 334, 443 und 517.

Für die Sätze über die Kugel, insbesondere die sphärischen Figuren ist als vortreffliches Hilfsmittel der Induktionsglobus zu nennen. Derselbe ist eine um eine Achse drehbare schwarze Kugel aus Schiefermasse, auf deren Oberfläche mit Kreide gezeichnet wird. Die letztere läßt sich, ganz wie bei der Wandtafel, mit dem Schwamm wieder abwischen. Die Firma Ernst Schotte & Co., geographisch-artistische Anstalt in Berlin W., Potsdamer Straße 41a liefert solche Induktionsgloben von 33 und 48 Centimeter Durchmesser in verschiedenen Ausstattungen, zugleich zum Gebrauche im geographischen und astronomischen Unterricht, zu Preisen von 12 bis 66 *M.* und 1,50 bis 4 *M.* für Emballage beim Versand. Für den Gebrauch des Mathematikers ist das gewöhnlich aufgedruckte rote Gradnetz störend; dasselbe wird deshalb auf besonderes Verlangen des Bestellers weggelassen.

Im allgemeinen sind die käuflichen Modelle zu kostspielig, um für Anstalten, deren Mittel beschränkt sind, die Anschaffung einer größeren Anzahl ratsam zu machen. Auch sind die käuflichen Modelle nicht immer in der wünschenswerten Größe angefertigt, welche unter thunlichster Vermeidung des lästigen Herumzeigens den gleichzeitigen Anblick von seiten vieler Schüler gestattet. Bei Selbstanfertigung der Modelle läßt sich an dem einzelnen Exemplar eine derartige Größe eher bewirken, als bei den auf Massenumsatz und pekuniären Gewinn der Unternehmer berechneten Fabrikaten.

Daß die Schüler sich selbst Modelle anschaffen oder verfertigen ist, schon des Zeitverbrauchs wegen, im allgemeinen nicht zu verlangen. Geschieht es hier und da freiwillig, so ist dies anzuerkennen und zu unterstützen, namentlich da, wo der Kostenpunkt nicht in betracht kommt und die Anfertigung an sich eine nützliche Übung ist, wie z. B. bei der Konstruktion der Netze der regelmäßigen Polyeder aus dünner Pappe. Wollen einzelne weitergehen, so kann ihnen als Hilfsmittel das folgende empfohlen werden:

Schwarz, A. N., Vorzeichnungen zu den körperlichen Beweisfiguren für den Unterricht in der Stereometrie. Vollständig in fünf Heften. Leipzig, J. M. Gebhardt.

Das 1. Heft dieses Hilfsmittels enthält 18 lithographische Tafeln in quer Folio mit einer Textbeilage, broschiert in Enveloppe und kostet *M.* 2,80. Weitere Hefte sind bis jetzt nicht erschienen. Die Vorzeich-

nungen sollen auf starkes Kartonpapier oder Pappe aufgeklebt, dann mit Scheere und Messer ausgeschnitten und nach der beigefügten Modellzeichnung an einander gefügt oder geklebt werden. Auf diese Weise werden zunächst Modelle für die Sätze von der Lage der Geraden und Ebenen gegen einander hergestellt. Einem allgemeineren Gebrauch sämtlicher fünf Hefte von seiten der Schüler dürfte jedoch schon der Preis entgegenstehen. Die Anschaffung für die Schule aber würde einen weitergehenden Gebrauch von Modellen im Unterricht voraussetzen, als wir für zweckmäßig halten.

In jedem Falle, in welchem Schüler sich Modelle für ihren eigenen Gebrauch anschaffen, sollen dieselben im allgemeinen nur zu Hause, bei der Repetition benutzt werden. In der Schule wirkt es störend, wenn Schüler Modelle in Händen haben, weil diese leicht die Aufmerksamkeit ablenken.

Auch der Gebrauch stereoskopischer Bilder*) sollte höchstens ausnahmsweise gestattet sein. Unzweifelhaft geben dieselben nächst den Modellen eine vorzügliche Veranschaulichung; ihre Anwendung wird jedoch dadurch gehindert, daß die einzelnen Zeichnungen nicht von mehreren Schülern zugleich gesehen werden können, und daß zur Vereinigung der beiden Bilder ein stereoskopischer Apparat erforderlich ist. Es müßte also entweder jede einzelne Zeichnung von den verschiedenen Schülern der Klasse nach einander betrachtet werden, oder jeder Schüler müßte ein Exemplar der Doppelfigur nebst einem Stereoskop in Händen haben. Daß das erstere Verfahren keinen gleichzeitigen gemeinsamen Unterricht zuläßt, bedarf keines Nachweises; das letztere bringt, abgesehen von dem Kostenpunkt, die Gefahr mit sich, daß die Aufmerksamkeit nicht auf das jedesmal zu Beachtende gleichmäßig gerichtet bleibe. Man kann zwar bei einiger Übung mit sehr einfachen stereoskopischen Apparaten auskommen, ja sogar dieselben ganz entbehren, indem man sie durch künstliches Schielen ersetzt. Dadurch, daß die beiden Augenachsen gegen einen Punkt konvergieren, welcher näher liegt als die Bildfläche, sieht man von jeder der beiden Zeichnungen derselben Figur zwei Bilder, und man kann es durch Veränderung des Winkels der Augenachsen dahin bringen, daß die beiden mittleren der so entstehenden vier Bilder einander so weit decken, um das stereoskopische Sehen eintreten zu lassen. Es wäre auf diese Art vielleicht möglich, daß größere, an der Zimmerwand aufgehängte Doppelfiguren von verschiedenen Schülern einer Klasse gleichzeitig stereoskopisch gesehen würden. Diese Art der Verwendung der Augen ist aber für dieselben recht anstrengend und deshalb zu verwerfen, abgesehen davon, daß sie erst nach besonderer Einübung, und vielleicht manchen Schülern gar nicht gelingt.

---

*) Z. B. Brude, Stereoskopische Bilder aus der Stereometrie. Stuttgart, Jul. Maier. 30 Bilder, 3 ℳ.

Alle derartigen Hilfsmittel sind für die Schule umsoweniger zu empfehlen, je künstlicher sie sind, und es ist daher immer wieder zu betonen, daß die einfachste und beste Hilfe in der Regel die stufenweise vor den Augen der Schüler entstehende Zeichnung an der Wandtafel ist, und für die häusliche Repetition die selbst entworfene Figur neben derjenigen des Lehrbuchs. Nur zur Überwindung der Anfangsschwierigkeiten, und weiterhin bei ungewöhnlich verwickelten oder ungewohnten Gestalten sind andere Hilfsmittel ein Bedürfnis. Wer z. B. die regelmäßigen Sternvielecke erläutern wollte, würde ohne stereoskopische Zeichnungen oder Modelle schwerlich auskommen, allein derartige Formen liegen im allgemeinen dem elementaren stereometrischen Unterricht fern, und die in diesem vorkommenden Gestalten sind fast durchweg von hinreichend einfacher Art, um mit geschickt gemachten gewöhnlichen Zeichnungen auskommen zu können.

§ 60. Methodische Winke für die Behandlung des Lehrstoffs im einzelnen.

Der stereometrische Unterricht beginnt mit einer Einleitung, welche die verschiedenen möglichen Lagen von Linien oder Ebenen im Raume erörtert. Hierbei sind besonders die als ganz neu auftretende Möglichkeit einander kreuzender (windschiefer) Geraden, der Satz daß zwei einander schneidende Ebenen stets eine Linie gemeinsam haben, und daß diese Durchschnittslinie stets eine Gerade ist, endlich die Bestimmung der Lage einer Ebene im Raume durch Punkte oder Linien hervorzuheben und gründlich zu erläutern. Das wesentlichste Hilfsmittel für stereometrische Untersuchungen ist die Zurückführung auf planimetrische Sätze, welche dadurch ermöglicht wird, daß passend gewählte Ebenen durch bestimmte Punkte oder Linen des betreffenden Raumgebildes gelegt werden. Daher ist dem Lernenden von anfang an geläufig zu machen, daß wenn zwei Punkte A, B einer Geraden einer Ebene angehören, damit ohne weiteres auch die Lage jedes dritten Punktes C dieser Geraden in der Ebene nachgewiesen ist, daß ferner verlangt werden kann, durch jede drei Punkte, nicht aber durch zwei willkürliche Gerade eine Ebene zu legen, u. s. w.

Vor einem logischen Fehler ist an dieser Stelle zu warnen: man darf nicht als Lehrsatz aufstellen, daß die Lage einer Ebene durch zwei parallele Gerade oder durch einen Kreis bestimmt sei, denn diese Gebilde sind ja als *ebene* definiert worden. Die Voraussetzung $AB \parallel CD$ enthält also ausgeführt die zwei Bedingungen: a) AB und CD liegen in *einer* Ebene, b) AB und CD schneiden einander nicht (im Endlichen). Die Behauptung, daß durch AB und CD sich stets eine Ebene legen läßt, wäre also eine Wiederholung der Voraussetzung a. Nur das ist auszusprechen, daß durch zwei parallele Gerade oder einen Kreis nicht *mehrere* Ebenen möglich sind.

Man wird nicht versäumen, schon an dieser Stelle durch Hinweis auf praktische Fälle anzuregen. Die Bestimmung der Lage einer Ebene durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte führt auf die Frage, warum ein vierbeiniger Tisch nicht notwendig mit allen Beinen auf einer Ebene aufstehen müsse, und auf die Anwendung dreibeiniger Stative u. dgl. Eine Thüre, die in zwei Angelpunkten befestigt ist, kann sich noch drehen; durch Befestigung eines dritten Punktes am Schloß wird sie verschlossen. Die Angelpunkte können durch Teile der sie verbindenden Geraden ersetzt werden. Die Oberfläche eines Brettes hört auf eben zu sein, sobald zwei ursprünglich parallele Grenzseiten derselben durch Werfen des Brettes windschief werden.

Die weitere Anordnung des Stoffes hängt natürlich auch hier vom gewählten Lehrbuch ab, dem sich der Lehrer in betreff derselben, wie in allem wesentlichen, zu fügen hat. Ziemlich allgemein wird jedoch die Einteilung in zwei Abschnitte sein, deren erster die Verbindungen von Geraden unter sich und mit Ebenen, sowie die Verbindungen mehrerer Ebenen unter einander im allgemeinen behandelt, während der zweite sich mit den geschlossenen Körperräumen beschäftigt. In betreff des ersteren Abschnittes ist vor einem zu raschen Durcheilen desselben entschieden zu warnen. Das Drängen nach der Behandlung der Körper ist in keiner Weise gerechtfertigt, denn jene Anfangspartien sind für die Schüler anschaulich oft recht schwierig, auch bilden dieselben die Grundlage für die Übung im Konstruieren im Raume, sowie für die Untersuchung der Eigenschaften der Körper, und die auf sie verwendete Zeit lohnt sich bei letzterer reichlich. In zahlreichen Fällen ist hier nur der Hinweis auf einen betreffenden Satz des ersten Abschnittes zu einem Beweise nötig.

Von vielen Seiten ist schon getadelt worden, daß bei der üblichen Behandlungsweise der Stereometrie die Rechnungen in der Regel bedeutend vorwiegen, und daß die Konstruktionen, namentlich auch in den Übungsaufgaben, zu kurz kämen. Diese Erscheinung ist jedoch bis zu einem gewissen Grade in der Natur der Sache begründet. Die Konstruktionen der Stereometrie sind von denen der Planimetrie erheblich verschieden: entweder sollen sie im Raume ausgeführt werden, und dies kann nicht durch eine Zeichnung geschehen, welche die Darstellung auf einer Zeichenfläche erfordert, oder es soll die letztere benutzt werden, und dann ist die Kenntnis einer oder mehrerer Projektionsmethoden im allgemeinen nötig, deren Erwerb kaum Sache der Stereometrie sein kann, vielmehr die Aufgabe einer später folgenden Disciplin, der deskriptiven Geometrie ist, für welche die Stereometrie die nötige Grundlage und Vorbereitung liefert. — Die erstere Art der Konstruktionen entbehrt also der bildenden Kraft, welche der wirklichen Ausführung mit Stift, Lineal und Zirkel innewohnt, und sie bedarf zu ihrer Veranschaulichung einer perspektivischen Figur, zu deren zweckmäßiger und richtiger Ausführung dem Schüler die Anleitung fehlt.

Die letztere Art dagegen verlangt die Vermischung oder gleichzeitige Behandlung der Stereometrie mit mindestens den Anfängen einer anderen Unterrichtsdisciplin, durch welche — wenigstens wenn sie für die praktische Ausführung der Konstruktionen nutzbringende Verwertung finden soll — der Fortschritt in dem eigentlichen stereometrischen Unterricht vielfach unterbrochen und verlangsamt wird. Auch erfordert die sorgfältige Ausführung der betreffenden Zeichnungen sehr viele Zeit. Aus diesen Gründen ist ein gewisses Widerstreben gegen eine ausgedehnte Heranziehung von Konstruktionsaufgaben wohl erklärlich.

Die Zeit, welche auf dem Gymnasium dem stereometrischen Unterricht zu Gebote gestellt werden kann, ist auf jeden Fall zu kurz, um auch die Elemente der Projektionslehre in denselben aufnehmen zu können. Höchstens ist es möglich, und es kann sogar als wünschenswert bezeichnet werden, daß man die fundamentalen Begriffe an den geeigneten Stellen einschalte und die entsprechenden Benennungen einführe. Dagegen kann man darüber geteilter Ansicht sein, ob nicht an solchen Schulen, in deren Lehrplan die deskriptive Geometrie eingeführt ist, wie an Realgymnasien, eine Verbindung der Elemente der letzteren mit dem stereometrischen Unterricht versucht werden solle. Eine Auswahl von für diesen Zweck geeigneten Aufgaben aus der darstellenden Geometrie ist von Krumme im pädagogischen Archiv, Jahrg. XXII, S. 294 ff. nach warmer Befürwortung und Begründung einer solchen Verbindung gegeben worden. Ein speziell ausgeführter Lehrgang einer solchen einander gegenseitig durchdringenden Behandlung der beiden Disciplinen unter gleichzeitigem Anschluß an den Zeichenunterricht der oberen Klassen dürfte als ein wichtiger Beitrag zur sogenannten Koncentration des Unterrichts dienen. Selbstverständlich müßte zu seiner praktischen Durchführung Sorge getroffen werden, daß die für jene drei Fächer bestimmten Stunden in der Hand eines und desselben Lehrers zusammengelegt werden könnten.

Selbst im Gymnasium ist jedoch eine völlige Ablehnung von Konstruktionen im stereometrischen Unterricht weder geboten noch wünschenswert. Die im Raume auszuführenden Konstruktionen, wenn sie auch nur in der Angabe des Verfahrens und seiner Begründung bestehen, haben doch den Vorteil, die räumliche Anschauung zu üben, und ihr Gebrauch kann für einzelne Beweise Vereinfachungen bieten. Ein Teil derselben dürfte in gleicher Art zum System zu rechnen sein, wie die Fundamentalaufgaben der Planimetrie.

Eine andere Reihe von Konstruktionen ist in der Ebene ausführbar, ohne daß die Kenntnis projektivischer Methoden nötig ist, und solche Aufgaben können recht belehrend und anregend sein. Als ein Beispiel hierzu sei etwa die Aufgabe erwähnt, aus den durch Zeichnung in einer Ebene gegebenen Größen der ebenen Winkel einer dreiseitigen Ecke die Neigungswinkel ihrer Flächenwinkel durch Konstruktion in einer Ebene zu finden, eine Aufgabe, welche bekanntlich mittels der in diese

Ebene umgeklappt gedachten, bei einer Konstruktion der Neigungswinkel im Raume gebrauchten Dreiecke gelöst werden kann, und welche auf ihre Ergänzung durch die entsprechende Rechnungsaufgabe der sphärischen Trigonometrie hinweist.

Hierzu möge als Beispiel einer Konstruktionsaufgabe auch der ersteren Art, deren Ausführung die durch sie erzielte Übung des räumlichen Vorstellens recht deutlich erkennen läßt, die bekannte angeführt werden: Zwischen zwei einander kreuzenden Geraden die kürzeste Verbindungsstrecke zu konstruieren. Andere Aufgaben dieser Art dienen zugleich zur Wiederholung analoger planimetrischer Lehren, wie z. B. die Aufsuchung von Entfernungsörtern, die Konstruktionen von Kugeln, welche durch gegebene Punkte gehen, oder gegebene Ebenen berühren, u. dgl. m.

Die besseren Lehrbücher bieten zu allen diesen Konstruktionsübungen das nötige Material. Außerdem darf auf des Verfassers „Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie, Teil 2: Stereometrie, 3. Aufl., Leipzig, B. G. Teubner" als Hilfsmittel hingewiesen werden.

Dasselbe Werk bietet auch eine Auswahl von Übungsstoff nach den beiden noch außerdem in Frage kommenden Richtungen, nämlich Lehrsätze zum Beweisen und Rechnungsaufgaben. Über die Behandlung derselben ist dem früher in betreff der Auflösung von Aufgaben Gesagten nichts wesentliches hinzuzufügen. Daß man auch hier in der Regel mit Hilfe geeigneter ebener Schnitte auf die Anwendung planimetrischer Lehren zu gelangen sucht, dürfte selbstverständlich sein. Die Rechnungsaufgaben sind entweder unmittelbare Zahlenbeispiele zur Anwendung abgeleiteter Formeln, oder man hat eine oder mehrere Gleichungen anzusetzen und aufzulösen, welche die in der Aufgabe angegebenen Beziehungen zwischen bekannten und gesuchten Stücken ausdrücken. Das Aufsuchen und Darlegen dieser Beziehungen zwischen den räumlichen Gebilden ist das hier neu Auftretende und dasjenige, was zur Übung der Anschauung und zur Befestigung des Gelernten wesentlich beiträgt.

Von Aufgabensammlungen zur Stereometrie ist außer der vorher erwähnten des Verfassers dieses Buches noch die nachstehende kleinere namhaft zu machen:

Müttrich, Sammlung stereometrischer Aufgaben, herausg. von Behr. Königsberg, Bon.

Wir fügen an dieser Stelle noch die Titel der folgenden Schriften bei, welche sich nicht auf stereometrische Aufgaben beschränken, sondern allgemeinerer Art sind:

La Frémoire's Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben der Elementargeometrie. Aus dem Französischen übersetzt von Kaufmann. Stuttgart, Koch. (Wohlfeile Ausgabe.)

Martus, Mathematische Aufgaben. Leipzig, Koch. Erster Teil: Aufgaben. Zweiter Teil: Resultate.

Das letztere Werk ist durch Sammlung von Abiturientenaufgaben aus Programmen höherer Lehranstalten entstanden, umfaßt dem entsprechend alle Gebiete des mathematischen Schulunterrichts mit für die oberen Klassen anwendbaren Problemen, und wird von Lehrern viel gebraucht.

§ 61. Fortsetzung: Planimetrische Analogien. Bewegung der Gebilde. Formellesen.

Die überraschende Ähnlichkeit zahlreicher stereometrischer Sätze mit entsprechenden planimetrischen tritt schon in den ersten Abschnitten hervor, zugleich aber auch der entschiedene Gegensatz beider in anderen Fällen. Zu einer Ebene läßt sich z. B., ebenso wie zu einer Geraden in der Ebene durch denselben Punkt nur eine einzige senkrechte Gerade ziehen; dagegen lassen sich auf einer geraden Linie im Raume in demselben Punkte beliebig viele Senkrechten errichten. Zwei zu einer Ebene senkrechte Gerade sind parallel, dagegen sind dies nicht notwendig zwei zu ersterer senkrechte Ebenen; damit auch hier ein analoger Satz gelte, muß noch die Voraussetzung paralleler Durchschnittslinien eingeschaltet werden. Es empfiehlt sich auf solche Analogien und Gegensätze hinzuweisen, denn dieselben erregen das Interesse, erleichtern die Auffassung sowie bei der zuweilen ebenfalls analogen Beweisführung das Verständnis, und bieten endlich eine ungezwungene Veranlassung zu gelegentlichen Repetitionen aus der Planimetrie. Besonders reichlich und fruchtbar sind die Analogien zwischen der dreiseitigen Ecke oder dem sphärischen Dreieck und dem ebenen, und daneben die bedeutungsvollen Unterschiede, welche der Mangel des Satzes von einer bestimmten Winkelsumme nach sich zieht. Die Vergleichung der beiderseitigen Kongruenzsätze z. B. bringt unmittelbare Folgen dieser Verschiedenheit. — Ein anderes derartiges Gebiet findet sich namentlich bei der Berechnung der Volumina. Zunächst kann bei dem Prisma ein ganz ähnlicher Gang wie bei der Flächenberechnung geradliniger ebener Figuren eingeschlagen und auch die Beweisführung so entsprechend gemacht werden, daß die Analogie eine fast vollkommene ist: dem Parallelogramm entspricht das Parallelepipedon, dem Dreieck das dreiseitige, dem Polygon das allgemeine Prisma. Dieselbe Beziehung wiederholt sich dann in erweitertem Sinne, indem auch Parallelogramm und Prisma überhaupt, Dreieck und Pyramide, Polygon und Polyeder einander entsprechen. — Auf die vielfachen Analogien zwischen Sätzen über die Kugel und solchen über den Kreis braucht auch der Schüler kaum erst aufmerksam gemacht zu werden.

Daß man in solchen und ähnlichen Fällen von der Erzeugung körperlicher Gebilde durch Bewegung ebener Figuren zweckmäßigen Ge-

brauch machen kann, ist bekannt. Überhaupt können die beiden einfachsten Bewegungsarten von Flächen oder Linien, die Parallelverschiebung und die Rotation um eine Achse, an verschiedenen Stellen der Stereometrie als sehr nützliche Hilfsmittel dienen. Eine der schönsten Anwendungen bieten die Rotationsflächen und die zugehörigen Körper, bezw. die Guldinsche Regel, wobei zugleich eine Verbindung mit der Physik stattfindet. Ob und wieweit man die genannte Regel in den Unterricht hineinziehen wird, hängt jedoch von den Verhältnissen ab; nicht jede Schule wird die Zeit dazu finden.

Ähnliches gilt von den Anwendungen des Prismatoids, doch sollte diese umfassende Körperart nur in den ungünstigsten Fällen ganz übergangen werden. Noch andere Gebiete, wie z. B. die halbregelmäßigen oder Archimedischen Körper, werden überhaupt nur vereinzelt zu Übungsstoff benutzt werden können.

Ein nicht zu vernachlässigendes Hilfsmittel, welches zwar schon auf früheren Stufen Anwendung finden kann, aber besonders in der Stereometrie öfter nahe gelegt wird, ist das Herauslesen neuer Lehrsätze aus abgeleiteten Formeln. So wird man beispielsweise aus der Regel für den Kubikinhalt eines Kegelstumpfs, $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$, sofort den Satz herauslesen: Jeder Kegelstumpf ist gleich der Summe dreier mit ihm gleich hoher Kegel, von denen zwei bezüglich die beiden Grundflächenradien des Stumpfs zu Radien haben, der dritte aber das geometrische Mittel aus denselben. Aus der Formel $O = 4r^2\pi$ für die Oberfläche einer Kugel liest man sofort: Die Oberfläche einer Kugel ist viermal so groß als der Inhalt eines größten Kreises derselben, sie ist gleich dem Inhalt eines Kreises, dessen Radius gleich dem Durchmesser der Kugel ist, oder gleich der gesamten Oberfläche eines geraden Kegels, dessen Radius gleich dem der Kugel, und dessen Seitenlinie dreimal so groß als dieser ist, u. dgl. m.

Weitere methodische Bemerkungen dürften auf dieser Stufe entbehrlich sein. Die früheren allgemeinen Vorschriften werden zum Teil auch auf dem vorliegenden Gebiete leicht zur Anwendung gebracht, andere mit der fortschreitenden Befähigung der Schüler zu wissenschaftlichem Verständnis mehr oder minder entbehrlich werden, und auf Einzelheiten, welche sich vielleicht noch anführen ließen, wird der denkende Lehrer aus der Praxis seines Unterrichts heraus von selbst gelangen.

§ 62. Die sphärische Trigonometrie.

Von der Aufnahme der sphärischen Trigonometrie in den Lehrplan der Gymnasien und von einer eingeschränkten Behandlung derselben im Anschluß an die Lehre von der Ecke oder dem sphärischen Dreieck in der Stereometrie ist schon im § 19, S. 67 die Rede gewesen. Im folgenden setzen wir einen vollständigeren Kursus derselben an einer Realanstalt voraus.

Die Formeln für das rechtwinkelige sphärische Dreieck der Kürze halber aus denen für das allgemeine abzuleiten, ist bedenklich. Zunächst entspricht dieses Verfahren nicht der Forderung des Fortschritts vom Besonderen zum Allgemeinen, welche hier bei dem Eintritt in ein neues und für die Schüler nicht immer ganz leichtes Gebiet zu Recht bestehen dürfte. Man wird umgekehrt bei der Ableitung der Formeln für das allgemeine Dreieck diejenigen für das rechtwinkelige mit Vorteil für das Verständnis benutzen können und dabei auch einer gewissen Analogie mit den Ableitungen der ebenen Trigonometrie nicht verlustig gehen. Außerdem gerät man durch die Weglassung des rechtwinkeligen Dreiecks in die Gefahr eines logischen Fehlers, denn man kann in keinem Falle umhin, eine oder mehrere der allgemeinen Formeln an einer Figur abzuleiten, und dann erfordert es die Logik, diese Ableitungen für alle verschiedenen Annahmen, also auch für die eines rechten Winkels auszuführen. Eine Formel, welche unter der ausdrücklichen oder stillschweigenden Voraussetzung eines nicht rechtwinkeligen Dreiecks bewiesen wurde, kann unbedingt nicht ohne weiteres für allgemein giltig ausgegeben und auf ein rechtwinkeliges Dreieck angewendet werden. Der besondere Beweis der Formel für das letztere kommt aber mit der Ableitung der entsprechenden vereinfachten Gleichung überein.

Die Formeln für das rechtwinkelige Dreieck gar nicht zu geben, sondern alle Dreiecke mit den allgemeinen Gleichungen berechnen zu lassen, führt zu keiner Zeitersparnis, sondern im Gegenteil zu unnützer Weitläufigkeit, wenn man nicht auf die zahlreichen schönen Anwendungen verzichten will, welche gerade das rechtwinkelige Dreieck, z. B. in der astronomischen Geographie, bietet.

Wegen ihrer leichten Anschaulichkeit befürworten wir auch hier, wie in der ebenen Trigonometrie, die Ableitung der meisten Grundformeln mittels der Figur, während die Gaußischen und die Neperschen, sowie andere nicht ganz einfache Gleichungen am besten aus jenen durch Rechnung abgeleitet werden.

Schon bei den Formeln für das rechtwinkelige Dreieck tritt die Analogie mit entsprechenden Formeln der ebenen Trigonometrie ersichtlich zu Tage und erleichtert das Behalten derselben, welches auch noch durch die Nepersche Regel oder durch das Zieglersche Komplementardreieck, jedoch immerhin in etwas künstlicher Weise erreicht werden kann. Daß die Formeln der einen Trigonometrie auch wirklich für die Annahme $r = \infty$ in die der anderen übergehen, mag ausdrücklich gezeigt werden.

Dieselbe Bemerkung gilt zunächst für die beiden ersten Grundformeln des allgemeinen Dreiecks, für welche der angegebenen Beziehungen wegen auch die entsprechenden Namen sphärischer Sinussatz und sphärischer Kosinussatz gebräuchlich sind. Die dritte ergiebt und merkt sich leicht aus der Anwendung des letzteren auf die Polarecke, die vierte ist schon mittels Rechnung abzuleiten. Schreibt man sie etwa in der Form

$$\cot b \,.\, \sin c = \cos c \,.\, \cos \alpha + \sin \alpha \,.\, \cot \beta,$$

so giebt die symmetrische Aufeinanderfolge der Funktionen

$$\text{cot} \quad \text{sin} \quad \text{cos} \quad | \quad \text{cos} \quad \text{sin} \quad \text{cot},$$

die Verteilung der beiden Alphabete auf die Hälften der Gleichung und die cyklische Aufeinanderfolge bc, $ca\,(\alpha)$, $ab\;(\alpha\beta)$ ein brauchbares mnemonisches Hilfsmittel.

Die Anwendung dieser Formeln auf die sechs einzelnen Fälle der Berechnung führt fast durchweg auf logarithmisch unterbrochene Rechnungen. Die Beseitigung der letzteren durch die Einführung von Hilfswinkeln ist in den meisten Fällen identisch mit der successiven Berechnung der beiden rechtwinkeligen Dreiecke, in welche das aufzulösende durch eine Höhe geteilt wird, da der Hilfswinkel nichts anderes als ein Bestimmungsstück eines dieser Dreiecke ist.

Auch bei den übrigen Gleichungen, welche zu den logarithmisch bequemen Methoden führen, treten die Analogien mit den entsprechenden der ebenen Trigonometrie deutlich zu Tage.

Über die Anordnung der Rechnungen, die Auswahl und Verteilung der eingekleideten und der zusammengesetzten Aufgaben u. dgl. m. kann im wesentlichen auf das in den Paragraphen 56 bis 58 Gesagte bezug genommen werden. Man findet geeignetes Übungsmaterial u. a. ebenfalls in des Verfassers Sammlung von Aufgaben a. d. Trigonometrie, Leipzig, Teubner.

§ 63. Schlußwort.

Die Methodik der noch übrigen Abschnitte, welche dem Pensum der Realprima angehören, der analytischen, der neueren und der deskriptiven Geometrie, sowie der Anfänge der Analysis des Endlichen, sollen hier nicht im einzelnen besprochen werden. Dem Verfasser stehen auf diesen Gebieten nicht die gleichen praktischen Erfahrungen zu Gebote, wie auf den vorhergehenden, auch dürften diese Abschnitte bei ihrer Beschränkung auf die oberste Klasse der Realanstalten wohl nur solchen Lehrern anvertraut werden, welche nicht mehr Anfänger in der Kunst des Unterrichtens sind, und denen es leicht sein wird, die allgemeinen methodischen Grundsätze unter Benutzung geeigneter Lehrmittel auf die besonderen Gebiete anzuwenden. Endlich ist auch zu erwarten, daß der bis hierher gebrachte Schüler dem Unterricht nicht mehr diejenigen Schwierigkeiten entgegenbringen werde, welche die Anwendung einer besonderen didaktischen Kunst erforderlich machen. Derselbe muß jetzt bereits diejenige Übung im Denken und die Reife des Verständnisses besitzen, welche ihn befähigen, auch einem Vortrage zu folgen, der nicht jeden Stein des Anstoßes im voraus sorgfältig aus dem Wege entfernt. Damit soll nicht gesagt sein, daß nicht auch auf diesen Gebieten dem einzelnen Lehrer die Erfahrungen anderer von Nutzen

sein können. Doch wird meist das Studium der besseren für den Schulgebrauch bestimmten Lehr- und Übungsbücher hinreichen, um zu zeigen, in welcher Weise die Verfasser derselben sich den Unterricht gestaltet denken, wie der Gegenstand zu gliedern und innerhalb welcher Grenzen er auszuführen sei. Um auch hier einige derartige Schriften anzuführen, nennen wir die folgenden:

1. Gandtner, Elemente der analytischen Geometrie, herausg. von Gruhl. Berlin, Weidmann.

2. Röntgen, die Anfangsgründe der analytischen Geometrie. Jena, Costenoble.

3. Fuhrmann, Analytische Geometrie der Kegelschnitte für höhere Schulen. Berlin, Winckelmann.

4. Fuhrmann, Einleitung in die neuere Geometrie für die oberen Klassen der Realschulen und Gymnasien. Leipzig, Teubner.

5. A. Maier, Neuere Geometrie. Karlsruhe, Braun.

6. Klingenfeld, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Man vgl. auch den Aufsatz von Stammer über den Unterricht in der darstellenden Geometrie an den Realgymnasien, in der Zeitschr. für math. u. natw. Unterricht XVI, S. 561, in welchem noch andere Hilfsmittel erwähnt sind.

Wir sind hiermit am Schlusse unserer Betrachtungen angelangt. Die Aufgabe, durch dieselben eine Darstellung des gegenwärtigen Standpunktes des mathematischen Unterrichts zu versuchen, hat dem Verfasser, wie schon im Eingange bemerkt worden, die Pflicht auferlegt, die ihm in den Arbeiten anderer zugänglichen Hilfsmittel möglichst zu benutzen. Die Ausbeute ist hierbei jedoch eine verhältnismäßig geringe gewesen. Denn zahlreiche frühere Arbeiten gehen von Verhältnissen aus, die sich inzwischen geändert haben, andere stützen sich auf Ansichten, welche infolge gänzlicher Verschiedenheit der Standpunkte zu einander völlig entgegengesetzten Resultaten führen, während an anderen Stellen, über welche die Mehrzahl der Lehrer einig ist, zahlreiche Urteile in gleichem Sinne vorlagen und es durchaus unzweckmäßig gewesen wäre, dieselben massenweise als Belegstellen anzuführen. Endlich mußten selbstverständlich alle diejenigen Arbeiten unbenutzt bleiben, welche einer noch unzureichenden pädagogischen Erfahrung entsprungen schienen, oder welche sich nur auf besondere Ausnahmefälle anwenden ließen. Daß immerhin manche wertvolle Leistung von anderen Seiten ihre Verwertung gefunden hat, wird der kundige Leser an zahlreichen Stellen erkennen, zugleich aber auch, daß der Verfasser viele Lücken allein aus eigener Erfahrung hat ausfüllen müssen. Was daran Unvollkommenes ist, wird vielleicht doch um deswillen nicht vergebens geschrieben sein, weil es zur Verbesserung Anlaß geben oder auch als Grundlage für einen fortschreitenden Ausbau der mathematischen Didaktik benutzt werden, mindestens aber hier und da

zu weiterem Nachdenken über angeregte Fragen und zur Durchbildung einer eigenen, wenn auch abweichenden Ansicht über dieselben veranlassen kann. Wer Besseres zu sagen und zu begründen versteht, möge dasselbe nicht ungesagt lassen. Auch daß manche wertvolle frühere Arbeit übersehen, manche zu besprechende Frage unerwähnt geblieben sein mag, wird bei der Schwierigkeit dieses ersten Versuches nicht zu arger Verurteilung desselben Anlaß geben dürfen; der Verfasser wiederholt aber hier am Schlusse die schon in der Einleitung ausgesprochene Bitte, ihn freundlichst auf Übersehenes in geeigneter Weise persönlich aufmerksam machen zu wollen. Ob derjenige, welcher seinen Unterricht nach der im vorliegenden Buche gegebenen Anleitung gestaltet, wenn nicht das Beste, so doch Gutes leisten wird, das zu beurteilen, müssen wir unseren etwaigen Lesern überlassen.